Lösningar till tentamen i kurs SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra 120612.

1. Låt $P(n)=\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}=\dfrac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(a-1)^2}$. $P(1): VL=1,\ HL=\dfrac{1-2a+a^2}{(a-1)^2}=1=VL$

   dvs $P(1)$ är sann.

   Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n+1$. Vi studerar VL i $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} ka^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}+(n+1)a^n=\{induktionsantagande\}=$$

$$=\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(a-1)^2}+(n+1)a^n=\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}+(a-1)^2(n+1)a^n}{(a-1)^2}=$$

$$=\frac{1+(n+1)a^n(a^2-2a)+na^{n+1}}{(a-1)^2}=\frac{1-(n+2)a^{n+1}+(n+1)a^{n+2}}{(a-1)^2}=HL\ i\ P(n+1)\ .$$

   Då är $P(n)$ sant för $n\geq 1$ enligt induktionsprincipen.

2. Vi för matrisen till trappstegsform:

$$A\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&0&-3&0\\0&0&3&0&3\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

   a) Vi söker lösningarna till systemet $A\overline{x}=\overline{0}$: $x_2=s, x_5=t, x_4=0, x_3=-t\Rightarrow x_1=-s-t$

   dvs $\overline{x}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$. De två vektorerna i lösningen spänner nollrummet och är linjärt oberoende och är därför en bas i nollrummet som då har dimensionen 2.

   Dimensionssatsen lyder: $rank(A)+nullity(A)=n$ där $rank(A)$ och $nullity(A)$ är dimensionerna hos kolumnrummet resp nollrummet och n är antalet kolumner i A .

   Detta ger $rank(A)$ = 5-2 = 3 .

   b) Kolumnerna med ledande etta i matrisens trappstegsform är nr 1, 3 och 4 . Då är motsvarande kolumner i A en bas i matrisens kolumnrum dvs

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$ är en bas där.

3 a) En godtycklig matris i V kan skrivas:

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Detta ger att de tre matriserna spänner V.

De är också linjärt oberoende ty om vi sätter högra ledet till $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ fås $a=b=c=0$.

De utgör då en bas i V.

b) Den sökta matrisen har som kolumner koordinatvektorerna $[T(A_i)]_B$, $i=1,2,3$.

$$T(A_1)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=A_1+2A_2+0A_3$$

$$T(A_2)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0A_1+1A_2+0A_3$$

$$T(A_3)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=-A_1-1A_2+A_3$$

Detta ger $[T]_B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4. Låt $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \Rightarrow f'(x)=b+2cx+3dx^2 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow b=0$.
Dvs $f(x)\in V \Rightarrow f(x)=a+cx^2+dx^3$. Låt $B=\{1,x^2,x^3\}$. Då gäller att $V=span(B)$. Dessutom fås: $a+cx^2+dx^3=0 \Rightarrow a=c=d=0$ vilket innebär att vektorerna i B är linjärt oberoende. Alltså är B en bas i V. Vi ortogonaliserar den med hjälp av Gram-Schmidts metod:

Låt $u_1=1$, $u_2=x^2$, $u_3=x^3$. Vi väljer $v_1=1$. Vi bildar nu

$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1$ där $\langle u_2,v_1\rangle=1+\int_{-1}^{1}2x\cdot 0\,dx=1$, $\langle v_1,v_1\rangle=1+\int_{-1}^{1}0\,dx=1$.

Detta ger $v_2=x^2-1$.

$v_3=u_3-\frac{\langle u_3,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1-\frac{\langle u_3,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle}v_2$ där

$\langle u_3,v_1\rangle=1+\int_{-1}^{1}3x^2\cdot 0\,dx=1$, $\langle u_3,v_2\rangle=0+\int_{-1}^{1}6x^3dx=0$, $\langle v_2,v_2\rangle=0+\int_{-1}^{1}4x^2dx=\frac{8}{3}$.

Detta ger $v_3 = x^3 - 1$, $\langle v_3, v_3 \rangle = 0 + \int_{-1}^{1} 9x^4 dx = \frac{18}{5}$. En ortonormal bas i V är då

$\left\{ 1 \, , \, \sqrt{\frac{3}{8}}(x^2 - 1) \, , \, \sqrt{\frac{5}{18}}(x^3 - 1) \right\}$.

5a) Regler för matrismultiplikation ger:

$$proj_V \bar{v} = (\bar{v}_1 \cdot \bar{v})\bar{v}_1 + (\bar{v}_2 \cdot \bar{v})\bar{v}_2 + ... + (\bar{v}_m \cdot \bar{v})\bar{v}_m = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 ... \bar{v}_m] \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \cdot \bar{v} \\ \bar{v}_2 \cdot \bar{v} \\ . \\ . \\ \bar{v}_m \cdot \bar{v} \end{bmatrix} = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 ... \bar{v}_m] \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ . \\ . \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} \bar{v} = AA^T \bar{v}$$

b) Låt $\bar{u}_1 = (-1,1,0)$, $\bar{u}_2 = (-1,0,1)$. Dessa är linjärt oberoende och utgör därför en bas i V .
För att ortogonalisera denna använder vi Gram-Schmidts metod:
Låt $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$, $\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = (-1,0,1) - \frac{(-1,0,1) \cdot (-1,1,0)}{(-1,10) \cdot (-1,1,0)} (-1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,-1,2)$. Vi

normerar nu dessa och låter $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$. Detta ger

$AA^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Med $\bar{v} = (2,-1,3)$ fås

$$proj_V \bar{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} .$$