KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra.
Tisdagen den 12 juni 2012 kl 0800-1300.

För godkänt betyg (E) krävs minst 6 poäng.
Den som uppnår 5 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 8, 10, 12 resp 14 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Uppgifter:

1. Låt a vara ett reellt tal som uppfyller att $a \neq 0$ och $a \neq 1$.
   Använd induktion för att visa att $\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \dfrac{1-(n+1)a^n + na^{n+1}}{(a-1)^2}$ för alla heltal $n \geq 1$. (2p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Bestäm en bas i matrisens nollrum $(\ker(A))$, formulera dimensionssatsen för matriser och ange matrisens rang. (2p)
   b) Bestäm en bas i matrisens kolumnrum $(\mathrm{im}(A))$. (1p)

3. Betrakta vektorrummet M_{22} av reella $2 \times 2-$matriser. De matriser A i M_{22} för vilka $Tr(A) = 0$ (spåret är noll) utgör ett underrum V i M_{22}.
   a) Visa att $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ där
   $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är en bas i V. (2p)
   b) Bestäm matrisen, relativt basen B, för den linjära avbildningen
   $T: V \to V$ som ges av $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

4. Betrakta vektorrummet P_3 av reella polynom med grad högst tre och definiera den inre produkten $\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\,dx$.
   Bestäm en ortonormal bas i det underrum V som består av alla polynom i P_3 som har derivatan noll för $x = 0$. (3p)

VGV

5a) Låt V vara ett underrum i $\mathbf{R}^n$ med en ortonormal bas $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\}$. Visa att standardmatrisen för ortogonal projektion på V ges av AA^T där A är matrisen med de givna basvektorerna som kolumner. (2p)

b) Använd detta för att bestämma den ortogonala projektionen i $\mathbf{R}^3$ av vektorn (2,-1,3) på underrummet $V = span\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$. (1p)