Lösningar till tentamen i kurs SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra 130107.

1. Låt $P(n) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1)$. $P(1): VL = 2 = HL$ dvs $P(1)$ är sann.

   Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 - k) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) + 3(n+1)^2 - (n+1) = \{induktionsantagande\} =$$

$$= n^2(n+1) + 3(n+1)^2 - (n+1) = (n+1)(n^2 + 3(n+1) - 1) = (n+1)(n^2 + 3n + 2) =$$

$$= (n+1)(n+1)(n+2) = (n+1)^2(n+2) = (n+1)^2((n+1)+1) \text{ .}$$

   Då är $P(n)$ sant för $n \geq 1$ enligt induktionsprincipen.

2. Värdemängden är matrisens kolumnrum som vi söker en bas i:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 100 & 1 & 299 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Detta ger att de två första kolumnerna i T:s matris kan väljas som den sökta basen i $im(T)$ som alltså ges av

$$span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 100 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$ Med $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 100 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} s \\ 2s+t \\ 100s+t \end{bmatrix}$ fås, efter elimination av parametrarna s och t : $z = 100x + y - 2x \Rightarrow 98x + y - z = 0$. Man kan som alternativ få planets normalvektor genom att beräkna kryssprodukten mellan de två basvektorerna. Då har planets ekvation formen $98x + y - z = C$ där konstanten C bestäms av att origo måste finnas i värdemängden eftersom $T(0) = 0$.

3.a) Då vi vet att dimensionen är tre räcker det att visa att de tre matriserna är linjärt oberoende:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} .$$

b) Vi låter $\{A_1, A_2, A_3\}$ vara den ortogonala basen som sedan normeras. Gram-Schmidts metod ger:

$A_1 = B_1$

$A_2 = B_2 - \dfrac{< B_2, A_1 >}{< A_1, A_1 >} A_1$

$A_3 = B_3 - \dfrac{< B_3, A_1 >}{< A_1, A_1 >} A_1 - \dfrac{< B_3, A_2 >}{< A_2, A_2 >} A_2$

De första två matriserna i den givna basen är redan ortogonala eftersom

$< B_1, B_2 >= Tr(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}) = Tr\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. Det ger

$A_2 = B_2$. På liknande sätt beräknas de övriga inre produkterna och resultatet är:

$< B_3, A_1 >= 2$, $< A_1, A_1 >= 4$, $< B_3, A_2 >= 2$, $< A_2, A_2 >= 4$ vilket ger

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nu normerar vi :

$\|A_1\|^2 =< A_1, A_1 >= 4$, $\|A_2\|^2 =< A_2, A_2 >= 4$, $\|A_3\|^2 =< A_3, A_3 >= 2$. ON-basen är alltså:

$\left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Låt $u = 1 + x$, $v_1 = 1 + x^2$, $v_2 = x + x^3$. Vi visar nu att de två senare är en bas i delrummet (som vi kallar V) eftersom de är linjärt oberoende:
$\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^3) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta x + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.
Basen är ortogonal eftersom $< v_1, v_2 >= 0$. Då gäller att

$proj_V u = \dfrac{< u, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 + \dfrac{< u, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2$. $< u, v_1 >=< u, v_2 >= 1$, $< v_1, v_1 >= 5$, $< v_2, v_2 >= 37 \Rightarrow$

$proj_V u = \frac{1}{5} v_1 + \frac{1}{37} v_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{37} x + \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{37} x^3$.

5.a) Då vi vet att dimensionen är fyra räcker det att visa att vektorerna är linjärt oberoende:
Se på ekvationen $\alpha w + \beta T w + \gamma T^2 w + \delta T^3 w = 0$ (1) . Vi skall visa att $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
Operera med T^3 i ekv (1): Eftersom $T^4 w = 0 \Rightarrow T^k w = 0$, $k = 5,6$ fås att $\alpha T^3 w = 0$ vilket ger $\alpha = 0$. Pss opererar vi nu med T^2 i (1) och får $\beta T^3 w = 0$ vilket ger $\beta = 0$.
Nu opererar vi med T i ekv (1) och får $\gamma T^3 w = 0$ vilket ger $\gamma = 0$. Ekv (1) ger nu $\delta T^3 w = 0$ vilket slutligen ger $\delta = 0$.

b) Vi utvecklar $Tw, T(Tw), T(T^2 w), T(T^3 w)$ i basen:

$Tw = 0w + 1Tw + 0T^2 w + 0T^3 w$, $T(Tw) = 0w + 0Tw + 1T^2 w + 0T^3 w$

$T(T^2 w) = 0w + 0Tw + 0T^2 w + 1T^3 w$, $T(T^3 w) = 0w + 0Tw + 0T^2 w + 0T^3 w$

Den sökta matrisen är då $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.