KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra.
Måndagen den 7 januari 2013 kl 0800-1300.

För godkänt betyg (E) krävs minst 6 poäng.
Den som uppnår 5 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 8, 10, 12 resp 14 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Uppgifter:

1. Använd induktion för att visa att $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)=n^2(n+1)$ för alla heltal $n \geq 1$. (2p)

2. Avbildningen $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 100 & 1 & 299 \end{bmatrix}$. Visa att $im(T)$ (värdemängden) är ett plan genom origo och ange ekvationen för detta plan på formen $ax+by+cz+d=0$. (3p)

3. Betrakta vektorrummet V av reella $2\times 2-$matriser med spåret noll. Det gäller att $dim V = 3$.
   a) Visa att $\{B_1, B_2, B_3\}$ där
   $B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ är en bas i V. (2p)
   b) Vi förser nu V med den inre produkten $<A,B>=Tr(AB^T)$ där A och B är matriser ur V.
   Bestäm med hjälp av Gram-Schmidts metod en ortonormal bas i V. (2p)

4. Betrakta vektorrummet P_3 av reella polynom med grad högst tre och definiera den inre produkten $\langle f,g\rangle = f(0)g(0)+f'(0)g'(0)+f''(0)g''(0)+f'''(0)g'''(0)$.
   Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $1+x$ på det delrum i P_3 som spänns av polynomen $1+x^2$ och $x+x^3$. (3p)

5. Låt V vara ett vektorrum med $dim V = 4$ och T en linjär avbildning $V \to V$.
   Låt w vara en vektor i V sådan att $T^3 w \neq 0$ och $T^4 w = 0$.
   a) Visa att $\{w, Tw, T^2 w, T^3 w\}$ är en bas i V. (2p)
   b) Bestäm matrisen för T relativt basen i a). (1p)