Lösningar till tentamen i kurs SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra 130604.

1. Låt $P(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. $P(1): VL = \frac{3}{4} = HL$ dvs $P(1)$ är sann.

Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \{induktionsantagande\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\left(1 - \frac{2n+3}{(n+2)^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+2)^2 - (2n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{((n+1)+1)^2} .$$

Då är $P(n)$ sant för $n \geq 1$ enligt induktionsprincipen.

2. Eftersom polynomet endast har reella koefficienter är även $z = 1 - i$ ett nollställe. Enligt faktorsatsen är då $(z-1+i)(z-1-i) = z^2 - 2z + 2$ en faktor i polynomet. Polynomdivision ger $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 5)$. De återstående nollställena ges nu av ekv $z^2 - 4z + 5 = 0$. Vi får $z = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$.

3. Standardbasen i P_3 är $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Vi väljer $v_1 = 1$ och bildar

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \text{ där } \langle u_2, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot 1 dx = 0 \text{ , } \langle v_1, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx = 2 \Rightarrow v_2 = x .$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \text{ där}$$

$$\langle u_3, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 dx = \frac{2}{3} \text{ , } \langle u_3, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x dx = 0 \Rightarrow v_3 = x^2 - \frac{1}{3} .$$

$$v_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3 \text{ där}$$

$$\langle u_4, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot 1 dx = 0 \text{ , } \langle u_4, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot x dx = \frac{2}{5} \text{ , } \langle v_2, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x dx = \frac{2}{3} \text{ ,}$$

$$\langle u_4, v_3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) dx = 0 \Rightarrow v_4 = x^3 - \frac{3}{5} x .$$

De fyra första ortogonala polynomen är alltså $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\right\}$.

(De egentliga Legendrepolynomen fås genom kravet att de skall ha värdet 1 för $x = 1$.)

4a) $Ker(T) = \{A : T(A) = 0\}$. Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Det ger $T(A) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ dvs

$Ker(T) = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\}$ där $d \in \mathbf{R}$. Det innebär att kärnan genereras av matrisen

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och har alltså dimensionen 1.

b) Standardbasen i P_2 ges av $B' = \{1, x, x^2\}$. Matrisen relativt baserna B och B' har som kolumner vektorerna

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = [1]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = [1 + x]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = [1 + x + x^2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och $\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = [1 + x + x^2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Koordinatvektorn för $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i basen B ges av

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d = 4, c = -2, b = 1, a = -2$. Det ger

koordinatvektorn $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Nu kan vi beräkna koordinatvektorn i basen B' för den avbildade

matrisen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. dvs matrisen avbildas på polynomet $1 + 3x + 2x^2$

vilket stämmer med avbildningens definition.

5a) Vi visar först att T är linjär:

1.

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ q(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \Rightarrow T(p+q)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)= \qquad p,q \in P_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n} a_k+\sum_{k=0}^{n} b_k = T(p)+T(q)$$

2. $T(\lambda p)=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=0}^{n} a_k=\lambda T(p)$, $\lambda \in \mathbf{R}$

Vi visar nu att T är surjektiv:

Vi skall visa att $im(T)=\mathbf{R}$ dvs att för varje tal r existerar ett polynom p av högst grad n så att $\sum_{k=0}^{n} a_k = r$. Detta är omedelbart klart eftersom vi tex kan låta $a_0 = r$ och $a_k = 0$, $k=1,2,...,n$.

b) Enligt dimensionssatsen gäller att $\dim(im(T))+\dim(Ker(T))=\dim(P_n)$. Detta ger $1+\dim(Ker(T))=n+1 \Rightarrow \dim(Ker(T))=n$.

c) Eftersom den givna mängden består av n st element räcker det, om man i b) har bestämt kärnans dimension, att visa antingen att polynomen utgör en linjärt oberoende mängd eller att de spänner kärnan. I annat fall måste man visa båda dessa påståenden. Vi visar först att de är linjärt oberoende och bildar $C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+...+C_n(x^n-1)=0$ för alla x . Eftersom ett polynom av grad n har n st nollställen följer att $C_1=C_2=...=C_n=0$ vilket innebär att polynomen är linjärt oberoende.

Nu visar vi att $Ker(T)=span\{x-1,x^2-1,...,x^n-1\}$. Låt den senare mängden vara V .

1. $V \subseteq Ker(T)$: $T(C_1(x-1)+...+C_n(x^n-1))=C_1T(x-1)+...+C_nT(x^n-1)=0$ enligt definitionen av T . Det betyder att en godtycklig linjärkombination av de n st polynomen ligger i kärnan.

2. $Ker(T)\subseteq V$: Låt p vara ett polynom i kärnan dvs $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ där $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$.

Då gäller att $a_0=-\sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow p(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x^k-1)\in V$. Punkterna 1. och 2. ger tillsammans att $Ker(T)=V$ dvs de givna polynomen spänner kärnan.