KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra.
Tisdagen den 4 juni 2013 kl 0800-1300.

För godkänt betyg (E) krävs minst 6 poäng.
Den som uppnår 5 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 8, 10, 12 resp 14 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Uppgifter:

1. Använd induktion för att visa att $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ för alla heltal $n\geq 1$. (2p)

2. Polynomet $z^4-6z^3+15z^2-18z+10$ har nollstället $z=1+i$. Bestäm polynomets alla nollställen. (3p)

3. Vid studiet av vissa differentialekvationer inom fysiken är Legendrepolynomen av intresse. De bildar en mängd med ett oändligt antal ortogonala polynom. Bestäm de fyra första av dessa genom att applicera Gram-Schmidts metod på standardbasen i P_3, försett med den inre produkten

$$\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)\,dx\ .$$
(3p)

4. Betrakta den linjära avbildning $T: M_{22}\to P_2$ som definieras av att
$$T(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix})=a+bx+cx^2\ .$$
 a) Bestäm avbildningens kärna, $Ker(T)$ och ange dess dimension. (1p)
 b) Låt $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ vara bas i M_{22} och B' standardbasen i P_2. Bestäm T: s matris relativt baserna B och B' och använd denna för att bestämma det polynom som matrisen $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ avbildas på. Kontrollera också att resultatet överensstämmer med definitionen av T. (2p)

5. Betrakta vektorrummet P_n och avbildningen $T:P_n\to\mathbf{R}$ som definieras av att $T(p)=\sum_{k=0}^{n}a_k$ där $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$.
 a) Visa att T är linjär och surjektiv (onto) . (1p)
 b) Bestäm kärnans dimension, $\dim(Ker(T))$. (1p)
 c) Visa att $\{x-1\ ,\ x^2-1\ ,\ x^3-1\ ,\ldots,\ x^n-1\}$ är en bas i $Ker(T)$. (2p)