Lösningar till tentamen i kurs SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra 140520.

1. Låt $P(n)=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$. $P(1): VL=2=HL$ dvs $P(1)$ är sann.
   Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)+(n+1)(n+2)=\{\textit{induktionsantagande}\}=$$

$$=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)=(\frac{n}{3}+1)(n+1)(n+2)=$$

$$=\frac{(n+1)}{3}(n+2)(n+3)\ .$$

   Då är $P(n)$ sant för alla $n \geq 1$ enligt induktionsprincipen.

2. Vi ser att $z=1$ är en rot. Division med $z-1$ ger faktorn $z^2-(2+3i)z-1+3i$. Vi söker nollställena till detta polynom. Kvadratkomplettering ger

$$(z-\frac{2+3i}{2})^2-(\frac{2+3i}{2})^2-1+3i=0 \Rightarrow (z-\frac{2+3i}{2})^2=-\frac{1}{4}\ .$$

$$w=z-\frac{2+3i}{2}=x+iy \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-\frac{1}{4} & (1) \\ 2xy \quad\;\; =0 & (2) \end{cases}$$

   Ur detta system fås $x=0$ ($y=0$ går ej enligt (1) eftersom x är reellt) . (1) ger då att

$$y=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow w=\pm\frac{i}{2}\ .\ \text{Detta ger slutligen} \begin{cases} z_1=\frac{2+3i}{2}+\frac{i}{2}=1+2i \\ z_2=\frac{2+3i}{2}-\frac{i}{2}=1+i \end{cases}\ .\ \text{De tre rötterna är}$$

   alltså $z=1, 1+i, 1+2i$.

3. Eftersom $\dim M_{22}=4$ behöver vi fyra linjärt oberoende matriser. De kommer då, enligt en sats, även att spänna M_{22} och alltså utgöra en bas. De två givna matriserna är linjärt oberoende ty $s\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow s=t=0$.
   Låt $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2t & s-t\\ t & s+t\end{bmatrix}$. Vad krävs för att $A \notin Span(V)$?
   Vi löser systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & a-b+c \\ 0 & 0 & 2a-3b+d \end{bmatrix}$$ Vi ser nu att en matris A där

$a-b+c \neq 0$ inte kan tillhöra $Span(V)$. Vi kan ta matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bilda nu

$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Låt nu

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-2t & s-t \\ t+u & s+t \end{bmatrix}$. Vi löser nu systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 2a-3b+d \end{bmatrix}$$ Vi ser nu att en matris A där

$2a-3b+d \neq 0$ inte kan tillhöra $Span(W)$. Vi kan ta matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bilda nu $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. De fyra matriserna är, pga urvals-

proceduren, linjärt oberoende och spänner därmed också M_{22} och U utgör alltså en bas.

4a) Vi skall visa att V innehåller nollmatrisen och är sluten under addition och multiplikation med skalär.
Uppenbarligen gäller att nollmatrisen finns i V.
1. Låt $B, C \in V$, $A(B+C) = AB + AC = BA + CA = (B+C)A$ dvs $(B+C) \in V$.
2. Låt $B \in V$ och $k \in \mathbf{R}$, $A(kB) = k(AB) = k(BA) = (kB)A$ dvs $(kB) \in V$.

b) Vad krävs av en matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ för att den skall tillhöra V? Vi studerar ekv

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2b & a+3b \\ 2d & c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2b-c & a+3b-d \\ -2a-3c+2d & -2b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Låt $c = 2s$, $d = t$ vilket

ger $b = s$, $a = -3s + t$. A har då formen $A = \begin{bmatrix} -3s+t & s \\ 2s & t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dvs

$V = Span\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. De två matriserna är även linjärt oberoende:

$s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s = t = 0$. En bas i V utgörs alltså av de två matriserna.

c) Låt $\{B_1, B_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$. Vi använder Gram-Schmidts metod för att finna en ortogonal bas $\{A_1, A_2\}$: $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2 - \dfrac{< B_2, A_1 >}{< A_1, A_1 >} A_1$. Detta ger med $Tr(B_2{}^T A_1) = Tr(B^T) = -3$ och $Tr(A_1{}^T A_1) = 2$:

$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. En ortogonal bas ges alltså av

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right\}$.

5a) Vi visar först att T är linjär: Låt f och g vara polynom av högst grad n . Då gäller $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ vilket ger

1. $T(f+g) = (f+g)(r) = f(r) + g(r) = T(f) + T(g)$ Det gäller även att $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ där λ är ett reellt tal. Detta ger

2. $T(\lambda f) = (\lambda f)(r) = \lambda f(r)$.

Därmed är det visat att T är linjär.

Vi visar nu att T är surjektiv:

Vi skall visa att $im(T) = \mathbf{R}$ dvs att för varje tal s existerar ett polynom p av högst grad n så att $T(p) = p(r) = s$. Detta är omedelbart klart eftersom vi tex kan låta p vara ett konstant polynom $p(x) = s$ vilket ger $p(r) = s$.

b) Enligt dimensionssatsen gäller att $\dim(im(T)) + \dim(Ker(T)) = \dim(P_n)$. Detta ger $1 + \dim(Ker(T)) = n + 1 \Rightarrow \dim(Ker(T)) = n$.

$Ker(T) = \{p \in P_n : p(r) = 0\}$. Vi visar nu att en bas i kärnan ges av $\{x - r, (x-r)^2, ...(x-r)^n\}$. Eftersom kärnans dimension är n räcker det, enligt en sats, att visa att de n polynomen är linjärt oberoende. Vi bildar ekvationen $C_1(x-r) + C_2(x-r)^2 + ...C_n(x-r)^n = 0$. Denna skall gälla för alla $x \in \mathbf{R}$.

Detta ger omedelbart att $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$ vilket innebär att polynomen är linjärt oberoende.