

Lösningar till tentamen i kurs SF1606 Kompletteringskurs till Differential - och Integralkalkyl II 120218.

1. Serien är positiv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ som är en geometrisk serie med kvoten $r = \frac{1}{3}$. Eftersom $|r| < 1$ är den konvergent. Den givna serien är då konvergent enligt satsen om dominerad konvergens (se ”Kompletterande kurslitteratur om serier”).

2. De sökta värdena måste antas i kritiska punkter, singulara punkter eller i intervallets ändpunkter. $f'(x)$ fås direkt ur analysens huvudsats:

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)}. \text{ Det ger den kritiska punkten } x=1. \text{ Vi ser också att } f(0)=0$$

och att singulara punkter saknas. För att kunna beräkna $f(1)$ och $f(2)$ måste vi bestämma $f(x)$. Vi använder partialbråksuppdelning:

$$\frac{1-t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(t+1)(t^2+1)}. \text{ Ur detta fås systemet}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases} \text{ vilket ger}$$

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \left[\ln(t+1) - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_0^x = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1). \text{ Ur detta}$$

$$\text{fås } f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}, \quad f(2) = \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 = \ln \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vi observerar att}$$

$$\sqrt{10} > 3 \Rightarrow \sqrt{2} > \frac{3}{\sqrt{5}} > 1. \text{ Då logaritmfunktionen är växande får vi slutligen att det}$$

minsta värdet är 0 och det största är $\ln \sqrt{2}$.

- 3.a Se läroboken

b Krökningen $\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}$. Vi beräknar de ingående storheterna:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = (1 + \cos t, 1 - \cos t, -\sqrt{2} \sin t) \Rightarrow v = |\vec{v}| = \sqrt{(1 + \cos t)^2 + (1 - \cos t)^2 + 2 \sin^2 t} = 2$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = (-\sin t, \sin t, -\sqrt{2} \cos t) \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 + \cos t & 1 - \cos t & -\sqrt{2} \sin t \\ -\sin t & \sin t & -\sqrt{2} \cos t \end{vmatrix} =$$

$$= (\sqrt{2}(1 - \cos t), \sqrt{2}(1 + \cos t), 2 \sin t) \Rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{2(1 - \cos t)^2 + 2(1 + \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Detta ger nu krökningen } \kappa = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4. Vi definierar $F(x, y, z, u) = z^2 + zu - u^2 - x$ och $G(x, y, z, u) = 2zu + u^2 - y$. Den givna punkten uppfyller då systemet $\begin{cases} F(x, y, z, u) = 0 \\ G(x, y, z, u) = 0 \end{cases}$. Vi beräknar Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)} = \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix} \text{ som i den givna punkten är } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Då dess determinant}$$

är $14 \neq 0$ är existensen av de två funktionerna klar enligt ”implicita funktionssatsen”. De båda sökta derivatorna kan fås genom implicit derivering map x resp y i systemet ovan. Detta kan göras var för sig eller på matrisnivå:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, u)} \frac{\partial(z, u)}{\partial(x, y)} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z + u & z - 2u \\ 2u & 2z + 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I den givna punkten fås $\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ vilket ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{7} \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{14}.$$

5. Se läroboken.