

Lösningar till tentamen i kurs SF1606 Kompletteringskurs till Differential - och Integralkalkyl II 120604.

1. Vi använder integraltestet: Om f är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 0$ så är serien $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ och den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} f(x)dx$ båda konvergenta eller divergenta.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2x+1} + e^{-x} \right) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left(\frac{1}{2x+1} + e^{-x} \right) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1) - e^{-x} \right]_0^R =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2R+1) - e^{-R} + 1 \right) = +\infty.$$

Serien är alltså divergent.

2. f är definierad för $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = 4 \frac{1-x}{\sqrt{1-4x^2}} > 0$

för $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ dvs f är strängt växande och alltså inverterbar. $D(f^{-1}) = R(f)$.

$f(-\frac{1}{2}) = 2 \arcsin(-1) + 0 = -\pi$ och $f(\frac{1}{2}) = 2 \arcsin(1) + 0 = \pi$. Då f är kontinuerlig och växande på intervallet fås att $D(f^{-1}) = R(f) = [-\pi, \pi]$. Allmänt gäller att

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0. \quad f'(0) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}.$$

3.

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y^3 \cos z & x^3 e^z & xyz \end{vmatrix} = (xz - x^3 e^z, x + y^3 \sin z - yz, 3x^2 e^z + 3y^2 \cos z).$$

Ytan S 's ekvation kan skrivas $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(z-1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ dvs den är en ellipsoid

med centrum i punkten $(0,0,1)$. Endast den del som är ovanför xy -planet är aktuell.

Vi vill använda divergenssatsen och lägger till den cirkelskiva D som fås då $z=0$ dvs

$x^2 + y^2 \leq 4$. $\text{div} \text{rot} \vec{F} = z - 3x^2 e^z + 3y^2 \sin z - z + 3x^2 e^z - 3y^2 \sin z = 0$. Om det

inneslutna området kallas K får vi enligt divergenssatsen:

$$\oint_{S+D} (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \text{div} \text{rot} \vec{F} dx dy dz = 0 \Rightarrow \iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = - \iint_D (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} dS.$$

På D gäller att $z=0$ och att $\hat{N} = (0,0,-1)$ (utåtriktad normal). Det ger integralen

$$- \iint_D (-x^3, x, 3x^2 + 3y^2) \cdot (0,0,-1) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 r dr = 24\pi.$$

Man kan också använda Stokes sats: $\iint_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \hat{N} dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där C är den cirkel

med radien 2 i xy -planet som är randkurva till ytan S .

4 a) f är kontinuerlig i origo om $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Om vi går in mot origo längs y -axeln blir gränsvärdet 0 eftersom $f(0,y) = 0$. Om vi i stället går in mot origo längs kurvan $y = -x^{2/3}$ ($y^3 = -x^2$) blir gränsvärdet -1. Gränsvärdet existerar alltså inte. Det betyder att f inte är kontinuerlig i origo.

b) De partiella derivatorna i origo existerar dock:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

5. Se läroboken.