

Lösningar till tentamen i kurs SF1606 Kompletteringskurs till Differential - och Integralkalkyl II 130110.

1. Vi stöder oss på Implicita funktionssatsen. Låt $F(x, y) = x^3 - 3xy - y^3 + 3$. F är en C^1 -funktion och punkten $(1, 1)$ ligger på nivåkurvan $F = 0$. Eftersom dessutom $\frac{\partial F}{\partial y} = -3x - 3y^2 \neq 0$ i punkten $(1, 1)$ är existensen av f klar.

Implicit derivering map x ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$. Vi ser att

$f'(1) = 0$ dvs $x = 1$ är en kritisk punkt till f . Vi använder 2:a derivatatestet för att avgöra punktens karaktär och deriverar implicit en gång till:

$$y'' = \frac{(2x - y')(x + y^2) - (x^2 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}. \quad x = y = 1, \quad y' = 0 \Rightarrow f''(1) = 1 > 0. \quad \text{Det}$$

ger att $x = 1$ är en lokal minpunkt.

- 2.a) Om till varje tal $\varepsilon > 0$ existerar ett tal ω så att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$ så har f gränsvärdet A då x går mot oändligheten.

- b) Eftersom $|\sin x| \leq 1$ för alla x får vi:

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} - 0 \right| \leq \frac{1}{x^2} < \varepsilon \quad \text{för alla } x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \omega \quad \text{och beviset är klart.}$$

3. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området begränsas av en ellipsbåge och ett linjestycke. Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \quad \text{som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen: På linjestycket}$$

$y = 7$ fås $g(x) = f(x, 7) = 7x$, $-2 \leq x \leq 2$. g saknar kritiska punkter. Randpunkterna ger $g(-2) = -14$, $g(2) = 14$. Kritiska punkter på ellipsen fås t ex med hjälp av

Lagranges multiplikatormetod: Låt $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 200)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = y + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_2 = x + 8\lambda y = 0 & (2) \\ L_3 = x^2 + 4y^2 - 200 = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{Ur (1) och (2) fås } \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{x}{8y} \Rightarrow x^2 = 4y^2.$$

Insättning i (3) ger $x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \Rightarrow y = \pm 5$. Detta ger punkter som dock inte ligger på "vår" del av ellipsen. Det största värdet är alltså 14 och det minsta är -14.

4.a) Om funktionen f är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$ är serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ båda konvergenta eller divergenta.

b) Vi använder integraltestet och får: $\int_1^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{x^2})dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \right]_1^X + 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Integralen ger resultatet $\frac{\pi}{2}$. Gränsvärdet kan t ex beräknas på följande sätt:

$$x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{x^2}{x} \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x^2})^{x^2} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \text{ eftersom}$$

$$(1 + \frac{1}{x^2})^{x^2} \rightarrow e \text{ då } x \rightarrow \infty. \text{ Resultatet är att den generaliserade integralens värde}$$

är $\frac{\pi}{2} - \ln 2$. Det ger att även serien är konvergent.

En alternativ lösning är att utnyttja jämförelsekriteriet. Man visar då att $\ln t \leq t - 1$ vilket ger att $\ln(1 + \frac{1}{n^2}) \leq \frac{1}{n^2}$. Eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent är också den givna serien det.

5. Först beräknar vi de partiella derivatorna i origo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

Nu beräknar vi de båda partiella derivatorna för $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - x^3y(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2} = \frac{x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2\sqrt{x^2+y^2} - x^2y^2(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Vi skall nu visa att dessa är kontinuerliga i origo dvs att de har gränsvärde noll då $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Vi inför polära koordinater och får:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} - 0 \right| = \left| \frac{r^4(\cos^3 \varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi \sin^3 \varphi)}{r^3} \right| \leq 3r \rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow 0^+.$$

På samma sätt visas att $\left| \frac{\partial f}{\partial y} - 0 \right| \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0^+$.

