

**Tentamen i kursen SF1606 Kompletteringskurs till Differential- och Integralkalkyl II.**

**Torsdagen den 10 januari 2013 kl 1400-1900.**

För godkänt betyg (E) krävs minst 7 poäng.

Den som uppnår 6 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.

För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 9, 11, 13 resp 15 poäng. Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

**Uppgifter:**

1. Visa att ekvationen  $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$  implicit, i en omgivning av punkten  $(1,1)$ , definierar en kontinuerligt deriverbar funktion  $y = f(x)$  sådan att  $f(1) = 1$ .  
Visa även att  $x = 1$  är en kritisk (stationär) punkt till  $f$  och bestäm dess karaktär. (3p)
  
- 2.a) Låt  $f$  vara en funktion som är definierad för alla  $x \geq M$  där  $M$  är ett fixt reellt tal. Ge den formella definitionen för det fall att  $f$  har gränsvärdet  $A$  då  $x$  går mot oändligheten,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ . (1p)
- b) Bevisa med hjälp av definitionen i a) att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$ . (2p)
  
3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen  $f(x, y) = xy$  i det område som bestäms av olikheterna  $x^2 + 4y^2 \leq 200$  och  $y \geq 7$ . (3p)
  
- 4.a) Formulera integraltestet för positiva serier. (1p)
- b) Avgör om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$  är konvergent eller divergent. (2p)
  
5. Låt  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
Visa att  $f$  är av klass  $C^1$  i origo, dvs att  $f$  har partiella förstaderivator i origo som är kontinuerliga där. (3p)