

Lösningar till tentamen i kurs SF1606 Kompletteringskurs till Differential - och Integralkalkyl II 130603.

1. Låt $g(t) = \frac{e^t}{2+t}$. Då g är kontinuerlig gäller enligt insättningsformeln att

$$f(x) = [G(t)]_0^{x^2} = G(x^2) - G(0) \quad \text{där } G \text{ är en primitiv funktion till } g. \text{ Kedjeregeln ger}$$

$$f'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = g(x^2) \cdot 2x = \frac{2xe^{x^2}}{2+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2e}{3}.$$

2. Funktionen är väldefinierad och kontinuerlig i hela planet utom i origo. För att kunna utvidga till en funktion som är kontinuerlig i hela planet krävs att f har ett gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Detta är dock inte fallet eftersom vi kan hitta två vägar in mot origo

$$\text{som ger olika resultat: } y = x \text{ ger } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \text{ och } y = 0 \text{ ger } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

3. Se Persson-Böiers : Analys i flera variabler sid 77-78.

4. Integranden är positiv och obegränsad vid $x = 0$. Integrationsintervallet är obegränsat. Vi delar upp intervallet:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^5+5x}} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^5+5x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^5+5x}} dx = I_1 + I_2.$$

På intervallet $(0, 1]$ gäller $x+1 \leq 2$, $\sqrt{x^5+5x} > \sqrt{5x} > \sqrt{x}$. Det ger att

$$I_1 < 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [4\sqrt{x}]_0^1 = 4. \text{ dvs } I_1 \text{ är konvergent.}$$

På intervallet $[1, \infty)$ gäller $\sqrt{x^5+5x} > \sqrt{x^5}$, $x+1 \leq 2x$. Det ger att

$$I_2 < 2 \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{5/2}} dx = 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^R = -4 \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{R}} - 1 \right) = 4. \text{ dvs } I_2 \text{ är}$$

konvergent. Då följer slutligen att även $I = I_1 + I_2$ är konvergent.

5. Låt T vara en sådan triangel. Vi utför variabelbytet

$$\begin{cases} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}. \text{ Funktionerna } u \text{ och } v \text{ är linjära. Det gör att}$$

triangeln T avbildas på en triangel S . Ellipsen avbildas på cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Vi får

$$\text{Arean} (S) = \iint_S dudv = \iint_T \left| \det \begin{bmatrix} d(u,v) \\ d(x,y) \end{bmatrix} \right| dx dy = \frac{1}{ab} \iint_T dx dy = \frac{1}{ab} \cdot \text{Arean} (T) .$$
 Det ger att den maximala arean av T är lika med den maximala arean av S multiplicerad med ab .

Arean av en liksidig triangel med sidan d är $\frac{\sqrt{3}}{4} d^2$. Sidan d hos en liksidig triangel

inskriven i en cirkel med radien R kan fås på följande sätt :

Placera triangeln så att ett hörn ligger i punkten $(R , 0)$. Ett av de andra hörnen hamnar

då i punkten $(R \cos \frac{2\pi}{3}, R \sin \frac{2\pi}{3}) = (-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2})$. Avståndsformeln ger då

$d = R\sqrt{3}$. Den sökta maximala arean är alltså $\frac{3\sqrt{3}}{4} ab$.