Lösningsförslag till tentamen i Tal och funktioner, SF1643, den 12 januari 2009.

1. a)

$$\frac{1+7i}{2-i} = \frac{(1+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-5+15i}{5} = -1+3i.$$

b)

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^{1/3}}{\sqrt[3]{5^4}}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2/3}}{5^{4/3}}} = \sqrt{\frac{1}{5^{2/3+4/3}}} = \frac{1}{5}.$$

c)

$$\cos(2\ \text{arctan}\ \frac{1}{2}) = 2\cos^2(\ \text{arctan}\ \frac{1}{2}) - 1 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{5}$$

(rita triangel för att se att $\cos(\text{arctan}(1/2)) = 2/\sqrt{5}$).

2. a)

$$2^{3x} = 8 \cdot 4^x \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^3 \cdot 2^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{2x+3} \Leftrightarrow 3x = 2x+3 \Leftrightarrow x = 3.$$

b)

$$\sqrt{x^2-3x} = \sqrt{3x-5} \Rightarrow x^2 - 3x = 3x - 5$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ eller } x = 5.$$

Detta betyder att de enda tänkbara lösningarna är $x = 1$ och $x = 5$. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger att endast $x = 5$ är en lösning.

c) $\ln\frac{1}{x} + 2\ln x = 2 \Leftrightarrow -\ln x + 2\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$

3. Eftersom $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$$\sin x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 3x.$$

Denna ekvation har två serier av lösningar:

1. $\frac{\pi}{2} - x = 3x + 2\pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2...$, vilket kan skrivas om som
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n = 0, \pm1, \pm2...;$$
2. $\frac{\pi}{2} - x = -3x + 2\pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2...$, vilket kan skrivas om som
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n = 0, \pm1, \pm2....$$

4.

$$\frac{x}{x-1} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-5(x-1)}{x-1} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{5-4x}{x-1} \leq 0.$$

Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

x		1		5/4	
$5-4x$	+		+	0	-
$x-1$	-	0	+		+
$\frac{5-4x}{x-1}$	-	ej def.	+	0	-

Således, olikheten är uppfylld för $-\infty < x < 1$ och $5/4 \leq x < \infty$.

5. Enligt binomialsatsen har vi

$$(a+3x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^k (3x)^{12-k}.$$

För att få en x^{10} term måste $k = 2$. Motsvarande term i summan är $\binom{12}{2} a^2 (3x)^{10}$. Enligt uppgiften, $\binom{12}{2} a^2 3^{10} = 66$. Vi beräknar:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Alltså, $66a^2 3^{10} = 66$, vilket ger att möjliga värden på konstanten a är $\pm \left(\frac{1}{3}\right)^5$.

6. Lös ekvationen $3|x| - |x-1| = 4$. Ekvationen kan skrivas om utan beloppstecken på följande sätt:

I. $x \geq 1 : \quad 3x - (x-1) = 4$,
II. $0 \leq x < 1 : \ 3x + (x-1) = 4$,
III. $x < 0 : \quad -3x + (x-1) = 4$.
Man får lösningar för respektive intervall:
I. $x = \frac{3}{2}$, ingår i intervall I;
II. $x = \frac{5}{4}$, ingår **ej** i intervall II;
III. $x = -\frac{5}{2}$, ingår i intervall III.
Svar: $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{5}{2}$.

7. Det givna polynomet har reella koefficienter vilket medför att också $z = 3+i$ måste vara en rot. Alltså måste polynomet innehålla faktorn $(z-(3+i))(z-(3-i)) = z^2 - 6z + 10$. Polynomdivision ger att

$$z^4 - 6z^3 + 13z^2 - 18z + 30 = (z^2 - 6z + 10)(z^2 + 3).$$

Eftersom $z^2+3=0$ har lösningarna $z=\pm\sqrt{3}i$, vet vi alltså att rötterna till det ursprungliga polynomet är

$$z = 3 \pm i \quad \text{och} \quad z = \pm\sqrt{3}i.$$

8. Påståendet "$7^n - 1$ är jämnt delbart med 6" är ekvivalent med "$7^n - 1 = 6q_n$ där q_n är ett heltal". Låt $P(n)$ vara påståendet att

$$7^n - 1 = 6q_n \text{ där } q_n \text{ är ett heltal.}$$

Basfall: För $n = 1$ har vi:

$$7 - 1 = 6$$

dvs $P(1)$ är sant.
Induktionssteget: Vi vill nu visa att för varje $k \geq 1$ gäller att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, dvs om $P(k)$ gäller, så gäller också $P(k+1)$.

Antag att $P(k)$ gäller för något $k \geq 1$, dvs antag att

$$7^k - 1 = 6q_k \text{ där } q_k \text{ är ett heltal.}$$

Då har vi

$$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 6 \cdot 7^k + 7^k - 1 = [\text{ind. ant.}] = \\ 6 \cdot 7^k + 6q_k = 6(7^k + q_k).$$

Eftersom $(7^k + q_k)$ är ett heltal, har vi visat att $P(k+1)$ gäller. Således har vi visat att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Enligt induktionsprincipen följer nu att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$.

Alternativ lösning: För varje heltal $n \geq 1$ har vi

$$\sum_{k=0}^{n-1} 7^k = \frac{7^n - 1}{7 - 1} = \frac{7^n - 1}{6}.$$

Eftersom VL är ett heltal ser vi alltså att $7^n - 1$ är delbart med 6.