KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Analys i en variabel, SF1644, 071203

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$. $f'(x)$ skall bestämmas med hjälp av derivatans definition.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+2(x+h)} - \frac{1}{1+2x}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{1+2x-(1+2(x+h))}{(1+2(x+h))(1+2x)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{-3h}{(1+2(x+h))(1+2x)} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{-2}{(1+2(x+h))(1+2x)} = \underline{-\frac{2}{(1+2x)^2}}\,.$$

2. Funktionen $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, $x > 0$ skall undersökas.

1. Derivatans tecken: $f'(x) = \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}\cdot(1/x^2) - e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\big(1-x\big)$.
$f'(x) > 0$ för $0 < x < 1$ dvs f är växande där.
$f'(x) < 0$ för $1 < x$ dvs f är avtagande där.
$f'(x) = 0$ för $x = 1$ vilket medför att $f(1) = 1/e$ är ett lokalt maximum.

2. Gränsvärden:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \big[t = 1/x,\ t\to\infty\big] = \lim_{t\to\infty} t/e^t = 0 \text{ (standard)}.$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0, \text{ eftersom } e^{-\frac{1}{x}} \to e^0 = 1 \text{ och } x\to\infty.$$

3. Globala extrempunkter:
1. visar att $f(1) = 1/e$ också är globalt maximum.
1. och 2. visar att någon global min.punkt inte existerar.

V.g. vänd!

3. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y(x) = x$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

y_H : $(D^2 + 2)y = 0$ ger karakteristiska ekvationen $r^2 + 2 = 0$, $r = \pm i\sqrt{2}$.
Alltså $y_H = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$.

y_P : Högerledet är ett polynom av grad 1: $h(x) = x$ och y saknas inte i vänsterledet.
Ansätt alltså ett polynom av grad 1 som partikulärlösning: $y_P = ax + b$.
$y_P' = a$. $y_P'' = 0$.
Insättning ger $0 + 2(ax + b) \equiv 0$, vilket ger $a = 1/2$, $b = 0$.
$y_P = x/2$.

Allmän lösning:
$y = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + x/2$.
$y' = -A\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + B\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) + 1/2$.

Unik lösning som uppfyller begynnelsevillkoren:
$y(0) = 0$ ger $0 = A$. $y'(0) = 1$ ger $1 = B\sqrt{2} + 1/2$, $B = \sqrt{2}/4$.

Svar: $y = (\sqrt{2}/4)\sin(\sqrt{2}x) + x/2$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x) - \ln(1+3x^2)}{x^2}$ skall bestämmas.

Vi använder MacLaurinutvecklingarna
$\ln(1+t) = t + O(t^3)$ och
$\sin t = t + O(t^3)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x) - \ln(1+3x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x + O(x^3)) - (3x^2 + O(x^4))}{x^2}) =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + O(x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + O(x^2)}{1} = \underline{-1}.$$

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då ytan

$$(1+x)^{1/2} \le y \le (1+x)^{3/2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

roterar omkring x-axeln. Man får $V = \pi \int_0^1 \Big(\big((1+x)^{3/2}\big)^2 - \big((1+x)^{1/2}\big)^2\Big)dx =$
$\pi \int_0^1 ((1+x)^3 - (1+x))dx = \pi \Big[(1+x)^4/4 - (1+x)^2/2\Big]_0^1 =$
$\pi(2^4/4 - 2^2/2 - (1/4 - 1/2)) = \pi(2 + 1/4) = \underline{9\pi/4}.$

6a. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till funktionen $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$.

Allmän formel :
$f(x) = f(0) = xf'(0) + \dfrac{x^2 f''(0)}{2!} + \dfrac{x^3 f'''(0)}{3!} + R_3.$
För den givna funktionen f:
$f(0) = \int_0^0 \sqrt{1+t^2}\, dt = 0$ (Integrationsintervallet har längden 0.)
$f'(x) = \sqrt{1+x^2}$ (huvudsatsen) , dvs $f'(0) = 1$.
$f''(x) = (1/2)(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = x(1+x^2)^{-1/2}$, dvs $f''(0) = 0$.
$f'''(x) = (1+x^2)^{-1/2} + x \cdot (-1/2)(1+x^2)^{-3/2} \cdot (2x)$, dvs $f'''(0) = 1$.
Insättning i allmänna formeln :
$\underline{f(x) = x + x^3/6 + R_3.}$

6b. Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med en feluppskattning mindre än 0.001.

Vi prövar $f(x) = x + R_1 = x + \dfrac{f''(\xi)}{2}x^2$ för $x = 0.1$.
$f(0.1) = 0.1 + \dfrac{f''(\xi)}{2}(0.1)^2, \quad (0 < \xi < 0.1)$
$R_1 = \dfrac{\xi(1+\xi^2)^{-1/2}}{2} \cdot 0.01 = \dfrac{\xi \cdot 0.005}{(1+\xi^2)^{1/2}}$
Eftersom $0 < \xi < 0.1$ gäller $0 < R_1 < 0.1 \cdot 0.005 = 0.0005 < 0.001$.
Svar: $f(0.1) = 0.1 + R_1$ där $|R_1| < 0.001$.

V.g. vänd!

7a. Formulera analysens huvudsats.
7b. Bevisa analysens huvudsats. Integralkalkylens medelvärdessats får användas utan bevis om den formuleras.
Se kursboken s. 294-297.

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$y'' + 4y = 1 - \cos 2x$ som uppfyller begynnelsevillkoren
$y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

$y_H :\quad (D^2 + 4)y = 0$ ger karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0, \quad r = \pm 2i.$
Alltså $y_H = A\cos(2x) + B\sin(2x).$

$(y_{P1}) :$ Högerledstermen 1 är ett polynom av grad 0: $h_1(x) = 1$ och y saknas inte i vänsterledet.
Ansätt alltså ett polynom av grad 0 som partikulärlösning: $y_P 1 = a.$
Man får $y_P' = 1/4$

$y_{P2} :$ Högerledstermen $-\cos(2x) = -Re\big(e^{2ix}\big)$ innebär resonans ($2i$ är en karakteristisk rot).
Inför den komplexa hjälpekvationen
$(*)\quad u'' + 4u = -e^{2ix}$ och ansätt den partikulära lösninge $u = z(x)e^{2ix}.$
Man får $u' = e^{2ix}(z' + 2iz)$ och $u'' = e^{2ix}(z'' + 4iz' - 4z).$
Insättning i (*) ger:
$e^{2ix}(z'' + 4iz') = -e^{2ix}, \quad z'' + 4iz' = -1.$ På grund av resonansen saknas z i vänsterledet. Ansätt alltså $z = bx, \quad z' = b,\ z'' = 0.$
Man får $4ib = -1,\ b = i/4, \quad z = ix/4, \quad u = (ix/4)e^{2ix} = (ix/4)(\cos(2x) + i\sin(2x)$
Slutligen : $\quad y_{P2} = Re(u(x)) = -(x/4)\sin(2x).$

Allmän lösning:
$y = A\cos(2x) + (B - x/4)\sin(2x) + 1/4$
$y' = -2A\sin(2x) + (2B - x/2)\cos(2x) - (1/4)\sin(2x)$
Insättning av begynnelsevillkoren ger: $y(0) = 1 = A + 1/4, \quad A = 3/4. \quad y'(0) = -1 = 2B,\ B = -1/2.$
Svar: $\quad y = (3/4)\cos(2x) - (x/4 + 1/2)\sin(2x) + 1/4.$

9a. Visa att $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{x^3+\pi^3} \quad \leq \quad \frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{8}\right).$

För $x > 0$ gäller $x > \sin x$, Alltså:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{x^3+\pi^3} \quad \leq \quad \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 dx}{x^3+\pi^3} =$$

$$= \Big[(1/3)\ln(x^3+\pi^3)\Big]_0^{pi/2} = (1/3)\ln\frac{(\pi/2)^3+\pi^3}{(\pi/2)^3} = (1/3)\ln\left(\frac{9}{8}\right). \qquad \text{VSV.}$$

9b. Visa att $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{4+\sin^2 x} \quad \geq \quad \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

För $x > 0$ gäller $x > \sin x$, Alltså:

$$\int_0^1 \frac{dx}{4+\sin^2 x} \quad \geq \quad \int_0^1 \frac{dx}{4+x^2} =$$

$$\Big[(1/2)\arctan(x/2)\Big]_0^1 = (1/2)(\arctan 1/2) - 0) = (1/2)\arctan 1/2) \text{ VSV.}$$

10a. Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-1}{x^3+1}dx = 0.$

Ledning: Substitutionen $x = 1/t$.

$$I = \int_0^\infty \frac{x-1}{x^3+1}dx = \big[x = 1/t, dx = -dt/t^2\big] = \int_\infty^0 \frac{1/t-1}{(1/t)^3+1}(-dt/t^2) =$$

$$= \big[\text{ Skifta gränser i integralen och förläng med } t^3\big] = \int_0^\infty \frac{(1-t)}{1+t^3}dt = -I$$

Alltså, 2I=0, I=0 VSV.

10b. Bestäm $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+1}dx.$

$$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+1}dx = \int_1^\infty \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int_1^\infty \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$\big[A$ kan bestämmas med handpål. och de andra med identifiering. $\big] =$

$$\int_1^\infty \left(\frac{-2/3}{x+1} + \frac{2x/3-1/3}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$$= \Big[-(2/3)\ln(x+1) + (1/3)\ln(x^2-x+1))\Big]_1^\infty = \left[(1/3)\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right]_1^\infty =$$

$$\lim_{x\to\infty}(1/3)\ln\frac{(1-1/x+1/x^2)}{(1+1/x)^2} \quad - \quad (1/3)\ln\frac{1}{4} = \ln(1/1) + (1/3)\ln 4 = 0 +$$

$$(1/3)\ln 2^2 = \underline{(2/3)\ln 2}.$$