

Tentamen i Analys i en variabel, SF1644, för Bio och K
3/12 2007

Gränsen för betyget E (godkänt) är 16 poäng inklusive bonuspoäng. Poängen 14-15 ger möjlighet att komplettera (betyget Fx).
Samtliga lösningar ska förses med utförliga motiveringar.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm med derivatans definition $\frac{d}{dx} \frac{1}{1+2x}$. (3p)

2. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ för $x > 0$
samt ange funktionens lokala och globala extrempunkter och gränsvärden
($x \rightarrow 0+$, $x \rightarrow \infty$) om de finns. (3p)

3. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y(x) = x$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (3p)

4. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x) - \ln(1 + 3x^2)}{x^2}$. (3p)

5. Bestäm volymen av den rotations kropp som bildas då ytan

$$(1+x)^{1/2} \leq y \leq (1+x)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roterar omkring x -axeln. (3p)

6a. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt. \quad (2p)$$

6b. Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med en feluppskattning mindre än 0.001. (2p)

7a. Formulera analysens huvudsats. (1p)

7b. Bevisa analysens huvudsats. Integralkalkylens medelvärdessats får användas utan bevis om den formuleras. (3p)

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y = 1 - \cos 2x \text{ som uppfyller begynnelsevillkoren} \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \quad (4p)$$

9a. Visa att $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{x^3 + \pi^3} \leq \frac{1}{3} \ln\left(\frac{9}{8}\right).$ (2p)

9b. Visa att $\int_0^1 \frac{dx}{4 + \sin^2 x} \geq \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ (2p)

10a. Visa att $\int_0^\infty \frac{x-1}{x^3+1} dx = 0.$
Ledning: Substitutionen $x = 1/t.$ (2p)

10b. Bestäm $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+1} dx.$ (2p)