Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamen i Analys i en variabel för I (SF1644)

3/12 2007

1. Derivatans definition är $f'(x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)$ om gränsvärdet existerar. Vi får då att derivatan bestäms av

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{1+2(x+h)} - \frac{1}{1+2x}\Big) &= \frac{1}{h}\ \frac{1+2x-(1+2x+2h)}{(1+2x+2h)(1+2x)}\\ &= \frac{1}{h}\ \frac{-2h}{(1+2x+2h)(1+2x)}\\ &= \frac{-2}{(1+2x+2h)(1+2x)} \to \frac{-2}{(1+2x)^2}\end{aligned}$$

när $h \to 0$, vilket visar att

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2x} = \frac{-2}{(1+2x)^2}.$$

2. Funktionen $y(x) = x^{-1}\exp(-x^{-1})$ är positiv för $x > 0$. Vi ser att $z := x^{-1}$ ger $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{z\to 0+} z\exp(-z) = 0$, eftersom $\exp(-z)$ är kontinuerlig. På samma sätt kan vi skriva standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0+} y(x) = \lim_{z\to\infty} z\exp(-z) = 0$.

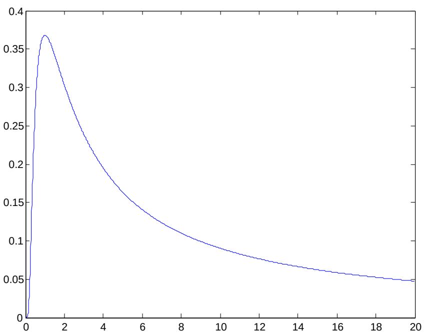
Derivering visar att

$$y'(x) = -x^{-2}e^{-x^{-1}} + x^{-1}x^{-2}e^{-x^{-1}} = \frac{1-x}{x^3}\ e^{-\frac{1}{x}},$$

vilket ger teckenschemat och skissen

Teckenschema

x		1	
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$



Vi ser att den positiva funktionen y har ett globalt maxivärde $y(1) = e^{-1}$ och gränsvärdet $y \to 0$ när $x \to 0+$ och när $x \to \infty$.

3. Den karakterisktiska polynomekvationen är $r^2 + 2 = 0$, som har lösningarna $r = \pm i\sqrt{2}$. Detta ger de homogena lösningarna $y_h = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$, för godtyckliga konstanter A och B. En partikulär lösningsansats är $y_p = C + Dx$ vilket insatt i differentialekvationen ger $0 + 2(C + Dx) = x$ som har lösningen $C = 0,\ D = 1/2$. Den allmänna lösningen är därför $y = x/2 + A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 1 &= y'(0) = 1/2 + \sqrt{2}B \end{aligned}$$

som har lösningen $A = 0,\ B = 2^{-3/2}$ och vi får differentialekvationens lösning

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x).$$

4. Vi har Maclaurinutvecklingarna

$$\sin(y) = y + B_1(y)y^3,$$
$$\ln(1+z) = z + B_2(z)z^2$$

där B_1 och B_2 är begränsade funktioner. Detta ger med $y = 2x$ och $z = 3x^2$ och nya begränsade funktioner B_3 och B_4

$$\frac{x\sin(2x) - \ln(1+3x^2)}{x^2} = \frac{x(2x + x^3B_3) - (3x^2 + x^4B_4)}{x^2} = \frac{-x^2 + x^4(B_3 - B_4)}{x^2}$$
$$= -1 + x^2(B_3 - B_4) \to -1,$$

när $x \to 0$.

5. Tvärsnittsarean blir $A(x) = \pi(1+x)^3 - \pi(1+x)$. Volymen, V, är integralen av tvärsnittsarean från $x = 0$ till $x = 1$ och vi får

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \pi\int_0^1 \big((1+x)^3 - (1+x)\big)dx$$
$$= \pi\Big[\frac{1}{4}(1+x)^4 - \frac{1}{2}(1+x)^2\Big]_0^1 = \pi(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \pi(4 - 2 + \frac{1}{4}) = \frac{9\pi}{4}.$$

6a. Maclaurinpolynomet av grad 3 till en funktion f är

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}.$$

Derivering ger i vårt fall

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2},$$
$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x\cdot x}{2(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = (1+x^2)^{-3/2}$$

så att Maclaurinpolynomet blir $x + x^3/6$. Vi ser att f och dess derivator till ordning tre är kontinuerliga funktioner.

6b. Vi behöver en resterm för att uppskatta felet och provar med resttermen baserad på tredjederivatan. Maclaurins formel visar att

$$f(x) - x = f^{(3)}(\theta x)\frac{x^3}{6}, \text{ för något } \theta \text{ där } 0 \le \theta \le 1,$$

och från uppgift 6a ser vi att $|f^{(3)}(\theta x)| = \big(1+(\theta x)^2\big)^{-3/2} \leq 1$. Då blir resttermens absolutbelopp högst $|x|^3/6$ som är mindre än 0.001 och vi ser att $f(0.1)$ approximeras av 0.1 med mindre fel än 0.001.

7. Se boken.

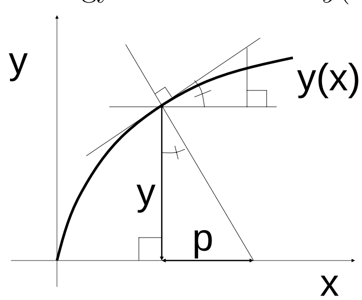
8. Figuren visar att kurvans tangent i punkten x är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1}{y^2}.$$

Detta är en separabel differentialekvation och vi får $\int y^2 dy = \int dx$ vilket ger

$$\frac{y^3}{3} = x + C$$

för en godtycklig konstant C. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger oss $C = 0$, så lösningen blir



$y(x) = (3x)^{1/3}$ för $x > 0$.

9a. Låt $y(x) = x^{-2}\ln(x)$. Derivatan $y'(x) = x^{-3}\big(1 - 2\ln(x)\big)$ visar att funktionen y är avtagande för $x > e^{1/2}$, speciellt är den då avtagande för $x \geq 2$. Alla termer i summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ är positiva utom den första som är noll. Eftersom funktionen y är avtagande för $x \geq 2$ kan summan uppskattas av integralen $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$, som vi bestämmer med partiell integration

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \Big[-\frac{\ln(x)}{x} \Big]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1+\ln(x)}{x} \Big]_1^{\infty} = 1.$$

Vi ser att summan av positiva termer är uppåt begränsad av 1 och då måste summan vara konvergent.

9b. Vi ser att summan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ består av positiva termer. Låt $y(x) := \big(x\ln(x)\big)^{-1}$, då är y avtagande för $x > 1$ och vi kan uppskatta summan med integralen

$$\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n\ln(n)} \geq \int_2^N \frac{dx}{x\ln(x)} = \left[\begin{array}{c} z = \ln(x) \\ dz/dx = 1/x \\ x = 2, z = \ln 2 \\ x = N, z = \ln N \end{array} \right] = \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{dz}{z} = \ln N - \ln 2$$

vilken blir obegränsat stor när $N \to \infty$. Alltså måste summan vara divergent.

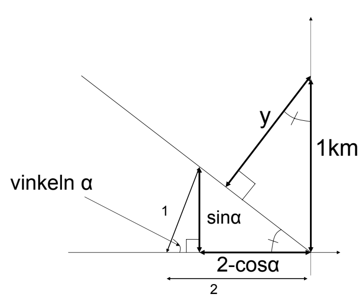
10. Det är praktiskt att betrakta Kalle i ett koordinatsystem där Eva är stilla. Figuren visar då att det minsta avståndet mellan dem, y, uppfyller

$$\frac{y}{1} = \frac{2-\cos\alpha}{\sqrt{(2-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}} = \frac{2-\cos\alpha}{\sqrt{4+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha - 4\cos\alpha}} = \frac{2-\cos\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}},$$

där $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. För att finna det minsta y som funktion av α söker vi lösningen till

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\alpha} y(\alpha) &= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}} - \frac{2(2-\cos\alpha)\sin\alpha}{(5-4\cos\alpha)^{3/2}} \\ &= \frac{(5-4\cos\alpha)\sin\alpha - 4\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{(5-4\cos\alpha)^{3/2}} \\ &= \frac{(1-2\cos\alpha)\sin\alpha}{(5-4\cos\alpha)^{3/2}} \end{aligned}$$

vilket ger lösningarna $1 - 2\cos\alpha = 0$ eller $\sin\alpha = 0$. Det första alternativet, $\cos\alpha = 1/2$, har lösningen $\alpha = \pi/3$ och teckenväxlingen $-, 0, +$ för y', så $\alpha = \pi/3$ är en minimipunkt med värdet $y(\pi/3) = \sqrt{3}/2 < 1$. Det andra alternativet, $\sin\alpha = 0$, ger större värde $y = 1$. Kalle kommer alltså så nära som möjligt om han ror i nordostlig rikting med vinkeln 60 grader från



ost.