Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen i Analys i en variabel för I (SF1644)

3/12 2007

Inga hjälpmedel är tillåtna.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Tentamen har 10 uppgifter på tre sidor. 16 poäng med bonus räcker säkert för betyg E. Betyg A, B, C, D, E baseras på totala poängsumman. För höga poäng ska (a) vara väl uppfyllt. Lycka till!

1. Bestäm med derivatans definition

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2x}.$$

(3 poäng)

2. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad \text{för } x > 0.$$

Ange också funktionens lokala och globala extrempunkter och gränsvärden ($x \to 0+,\ x \to \infty$) om de finns. (3 poäng)

3. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y(x) = x$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (3 poäng)

4. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(2x) - \ln(1 + 3x^2)}{x^2}.$$

(3 poäng)

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då ytan

$$(1 + x)^{1/2} \leq y \leq (1 + x)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

roterar omkring x-axeln. (3 poäng)

6a. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 till funktionen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

(2 poäng)

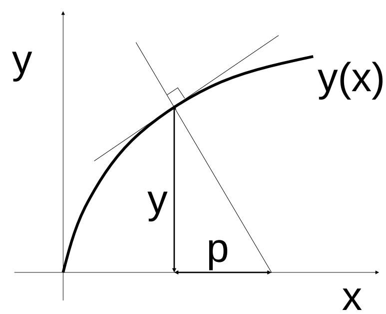
6b. Bestäm ett närmevärde till $f(0.1)$ med en feluppskattning mindre än 0.001. (2 poäng)

7a. Formulera analysens huvudsats. (1 poäng)

7b. Bevisa analysens huvudsats. Medelvärdessatsen får användas utan bevis om den formuleras.

(3 poäng)

8. Leibniz blev känd när han i Paris, den 11:e november 1675, bestämde kurvan $y(x)$ vars subnormal p, se figuren, är $p = 1/y(x)$. Ställ upp en differentialekvation för y och bestäm $y(x)$ för $x > 0$ när $y(0) = 0$. Den tjocka kurvan i figuren är y som funktion av x, basen i triangeln är p och höjden i triangeln är $y(x)$. (4 poäng)



9a. Visa att summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

är konvergent. (2 poäng)

9b. Är summan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

konvergent? Motivera ditt svar. (2 poäng)

10. Kalle och Eva ror i var sin båt. Eva är 1 km norr om Kalle. Eva ror med farten 2 rakt öster ut. Kalle ror med farten 1. I vilken vinkel ska Kalle ro för att komma så nära som möjligt till Eva? Båda ror rakt, dvs de rör sig längs räta linjer. (4 poäng)