KTH Matematik

Lösningar till tentamen i envariabelanalys, SF1644 för Bio, K och I tisdagen den 3 juni 2008, kl. 14.00 - 19.00.

1. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-3x+2}$.

Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$. Använd l'Hospitals regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{2x-3} = \frac{\pi\cos\pi}{-1} = \underline{\pi}.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y = 1$.

Homogen lösning:
Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2 = 0$ har lösningen $r = \pm\sqrt{2}\, i$.
$y_H = A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)$.
Partikulärlösning:
Ansats $y_P = a$ ger $0 + 2a = 1, \quad a = 1/2$.
Svar: $y = y_H + y_P = \underline{A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t) + 1/2}$.

3. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\right)$.
Funktionen som är av typen $'\sqrt{\ } - \sqrt{\ }'$ kan bearbetas genom en förlängning med konjugaten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left((\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

V.g. vänd!

4. Visa att $\dfrac{x}{e} \geq \ln x, \quad x > 0.$

Sätt $f(x) = \dfrac{x}{e} - \ln x$. Visa att $f(x) \geq 0,\ x > 0$.
$f'(x) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{ex}$.

$f'(x) < 0$ för $0 < x < e \;\Rightarrow\; f$ är avtagande där.
$f(e) = 0$.
$f'(x) > 0$ för $0 < x < e \;\Rightarrow\; f$ är växande där.
Detta medför att $f(x) \geq 0, \quad x > 0$. VSB.

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då ytan definierad av $0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}, \quad x \geq 5,$ roterar omkring x-axeln.

Enligt formel:

$$V = \pi \int_5^\infty y^2\ dx = \pi \int_5^\infty \frac{1}{x(x-4)}\ dx =$$

$$\pi \int_5^\infty \left(\frac{-1/4}{x} + \frac{1/4}{x-4} \right) dx =$$

$$\pi \Big[(1/4)(-\ln x + \ln(x-4) \Big]_5^\infty = \pi \Big[(1/4)(\ln(1-4/x) \Big]_5^\infty =$$

$$\frac{\pi}{4}(\lim_{x\to\infty} \ln(1-4/x) - \ln(1-4/5)) = \frac{\pi}{4}(\ln 1 - \ln(1/5)) = \underline{\frac{\pi}{4}\ln 5}.$$

6. Bestäm integralen $I_n = \displaystyle\int_0^1 \arctan(nx)dx, \quad n = 1, 2, 3, ...$
Bestäm även gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Använd partiell integration:

$$I_n = \int_0^1 \arctan(nx)dx = \Big[x \arctan(nx) \Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{nx\ dx}{1+n^2x^2} =$$

$$\arctan n - 0 - \left[\frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2) \right]_0^1 = \underline{\arctan n - \frac{1}{2n}\ln(1+n^2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} (\arctan n - \frac{1}{2n}\ln(1+n^2)) = \underline{\pi/2},$$

Andra termen går mot 0 eftersom $0 \leq \dfrac{1}{2n}\ln(1+n^2)) \leq \dfrac{3}{2n}\ln n \to 0$ (standardgrv.)

Anm: Uppgiften visar ett fall där likheten $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$ gäller.
Denna likhet gäller dock inte alltid.

Alternativ uppgift 6. Genomför intervallhalveringsmetoden med tre iterationer för att approximera $\sqrt{3}$.

Lösning: Använd metoden på ekvationen $x^2 - 3 = 0$. Se läroboken s. 165.

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$, där a och b är godtyckliga reella tal.

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+b+a-b}{n+b}\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{a-b}{n+b}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a-b}{n+b} + O\left((\frac{a-b}{n+b})^2\right)\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-b}{1+b/n} + O\left(\frac{n(a-b)}{(n+b)^2}\right)\right) = \underline{a-b}.$$

Anm: Funktionen $n \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$ är definierad för $n > max(|a|, |b|)$, vilket betyder att gränsvärdet är definierat för alla värden på a och b.

8. MacLaurinutveckla till och med andragradstermen den deriverbara funktion $y(x)$ som definieras av ekvationen $y^n + xy + x^2 = 1$ och villkoret $y(0) = 1$. (n är ett positivt heltal).

Jämför dessutom i fallen $n = 1$ och $n = 2$ den erhållna utvecklingen med funktionen $y(x)$ som i dessa fall kan bestämmas explicit.

Derivera ekvationen två gånger och sätt in $x = 0$:
$ny^{n-1}y' + y + xy' + 2x = 0$. $x = 0, y = 1$ ger $ny'(0) + 1 = 0$,
$y'(0) = -1/n$.
$n(n-1)y^{n-2}(y')^2 + ny^{n-1}y'' + y' + y' + xy'' + 2 = 0$.

V.g. vänd!

$x=0, y=1, y'=-1/n$ ger $\quad n(n-1)(-1/n)^2+ny''(0)-1/n-1/n+0+2=0, \quad ny''(0)=-\dfrac{n^2-n}{n^2}+\dfrac{2}{n}-2=-1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n_2}=-3+\dfrac{3}{n}.$

$y''(0)=-3\dfrac{n-1}{n^2}.$ MacLaurinutvecklingen av $y(x)$ blir alltså

$$\underline{y=1-\frac{x}{n}-\frac{3(n-1)}{2n^2}x^2+R_2.}$$

I fallen $n=1$ och $n=2$ kan $y(x)$ lösas ur ekvationen:

$n=1$: $\quad y=(1-x^2)/(1+x)=1-x \quad (x\neq -1)$.

Motsvarande MacL-utveckl: $y_1=1-x+R_2$.

$n=2$: $\quad$ (*) $y=-x/2+\sqrt{1-3x^2/4}$. (Endast +-fallet uppfyller $y(0)=1$)

Motsvarande MacL-utveckling: $y_2=1-x/2-3x^2/8+R_2$ som kan visas överensstämma med utvecklingen av (*).

9. Undersök om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, *b)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, *c)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

a) Generaliserad i $x=0$. $\quad \dfrac{1}{1+x^2}\leq 1.$ Alltså

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx\right| \leq \left|\int_0^1 \ln x\,dx\right| = \left|\big[x\ln x - x\big]_0^1\right| =$$

$$|0-1-\lim_{x\to 0+} x\ln x+0=|0-1-0+0|=1, \quad \text{konv.}$$

b) $\ln x\leq\sqrt{x}$ $(x\geq 1)$ och $\frac{1}{1+x^2}\leq 1.$ Alltså

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx =$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx, \quad \text{konvergent} \quad (3/2>1).$$

c) $\sqrt{1+x^2}<\sqrt{3x^2+x^2}=2x$ $(x\geq 1)$. Alltså $\displaystyle\int_1^M \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx >$

$$\int_1^M \frac{\ln x}{2x}\,dx = \Big[(1/4)(\ln x)^2\Big]_1^M,$$ som divergerar då $M\to\infty$.

Svar: a) konv. b) konv. c) div.

10. Visa att $2x - x^2 \geq \sin\big(\dfrac{\pi x}{2}\big), \quad 0 \leq x \leq 2.$

Efterson både VL och HL i olikheten uppfyller $f(2-x) = f(x)$ är båda funktionerna symmetriska omkring $x = 1$. Därför behöver man bara visa olikheten för $0 \leq x \leq 1$.

Sätt $F(x) = 2x - x^2 - \sin\big(\dfrac{\pi x}{2}\big)$. $\quad F(x) \geq 0$, ska visas för $0 \leq x \leq 1$.

Derivering ger:

$$F'(x) = 2 - 2x - \frac{\pi}{2}\cos\big(\frac{\pi x}{2}\big).$$

$$F''(x) = -2 + \frac{\pi^2}{4}\sin\big(\frac{\pi x}{2}\big).$$

$$F'''(x) = \frac{\pi^3}{8}\cos\big(\frac{\pi x}{2}\big)$$

$F'''(x) > 0, \quad 0 \leq x < 1.$ $\quad F''$ är alltså växande i $[0,1[$

$F''(0) = -2 < 0, \quad F''(1) = -2 + \frac{\pi^2}{4} > 0,$ $\quad$ Alltså har F'' ett unikt 0-ställe, $a(= \frac{2}{\pi}\arcsin\big(\frac{8}{\pi^2}\big))$ i $]0,1[$.

$F'' < 0$ i $]0,a[$ och $F'' > 0$ i $]a,1[$.

F' är alltså avtagande i $]0,a[$ och växande i $]a,1[$

$F'(0) = 2 - \pi/2 > 0 \quad F'(1) = 0.$ $\quad$ Alltså har F' ett unikt 0-ställe, b i $]0,a[$ och inget 0-ställe i $]a,1[$.

$F' > 0$ i $]0,b[, \quad F' < 0$ i $]b,1[$.

F är alltså växande i $]0,b[$ och avtagande i $]b,1[$.

$F(0) = 0, \quad F(1) = 0$

De två sista raderna innebär att $F(x) \geq 0$ i $[0,1]$. $\qquad$ VSB.