

## KTH Matematik

Tentamen i envariabelanalys, SF1644, för Bio och K samt I  
tisdagen den 3 juni 2008, kl. 14.00 - 19.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg E (godkänt) krävs minst 16 poäng inklusive bonuspoäng.

Om 14p uppnås finns möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall kursledare.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Bestäm gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 3x + 2}$ . (3p)

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen  $y'' + 2y = 1$ . (3p)

3. Bestäm gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$ . (3p)

4. Visa att  $\frac{x}{e} \geq \ln x$ ,  $x > 0$ . (3p)

5. Bestäm volymen av den rotations kropp som bildas då ytan definierad av  
 $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ,  $x \geq 5$ , roterar omkring x-axeln. (3p)

6. Bestäm integralen  $I_n = \int_0^1 \arctan(nx) dx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
Bestäm även gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ . (4p)

**Alternativ uppgift 6.** Genomför intervallhalveringsmetoden med tre iterationer för att approximera  $\sqrt{3}$ . (4p)

V.g. vänd!

7. Bestäm gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( \frac{n+a}{n+b} \right)$ , där  $a$  och  $b$  är godtyckliga reella tal. (4p)

8. MacLaurinutveckla till och med andragradstermen den deriverbara funktion  $y(x)$  som definieras av ekvationen  $y^n + xy + x^2 = 1$  och villkoret  $y(0) = 1$ . ( $n$  är ett positivt heltal).  
Jämför dessutom i fallen  $n = 1$  och  $n = 2$  den erhållna utvecklingen med funktionen  $y(x)$  som i dessa fall kan bestämmas explicit. (4p)

9. Undersök om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

$$a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad b) \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad c) \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (4p)$$

10. Visa att  $2x - x^2 \geq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . (4p)