Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen i Analys i en variabel för I (SF1644)

1/6 2009

Inga hjälpmedel är tillåtna.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Tentamen har 10 uppgifter på två sidor. 16 poäng med bonus räcker säkert för betyg E. Betyg A, B, C, D, E baseras på totala poängsumman. För höga poäng ska (a) vara väl uppfyllt. Lycka till!

1. Bestäm med derivatans definition

$$\frac{d}{dx}\, e^x.$$

(3 poäng)

2. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(\sin x)^2}{1 - \cos x} \ .$$

(3 poäng)

3. Lös differentialekvationen

$$z''(t) + 3z(t) = 1$$

med begynnelsedata $z(0) = z'(0) = 0$. (3 poäng)

4. Skissera kurvan $e^x y = x - 1$ och ange lokala och globala extrempunkter, nollställen och gränsvärden för funktionskurvan y som funktion av x. (3 poäng)

5. Beräkna $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{x+1}dx$. Tips: Använd variabelsubstitution $u = x + 1$. (3 poäng)

6. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår när ytan definierad av

$$0 \leq y \leq \frac{1}{(1+x^2)^2}, \ -\infty < x < \infty,$$

roterar omkring **y**-axeln. (4 poäng)

7. Härled uttrycket

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx$$

för längden av en längden av en kurva $\{(x,y)\ :\ a \leq x \leq b,\ y = f(x)\}$ med hjälp av gränsvärde av små längdelement, för ett givet intervall (a,b) och en given derivarbar funktion f på intervallet. (4 poäng)

8a. Hur många reella lösningar har ekvationen

$$x^3 + 3x - 1 = 0?$$

(3 poäng)

8b. Bestäm också närmvärden till lösningarna med noggranheten $1/2$. (1 poäng)

9. Bestäm alla kurvor $(x, f(x))$ där tangenten i en godtycklig punkt $(x, f(x))$ skär x-axeln i punkten $(2x, 0)$. (4 poäng)

10. Bevisa att en likformigt kontinuerlig funktion är integrerbar över ett begränsat intervall. (4 poäng)