Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamen i Analys i en variabel för I och K (SF1644)

1/6 2009

1. *Bestäm med derivatans definition*

$$\frac{d}{dx}\, e^x.$$

Derivatans definition är $f'(x) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)$ om gränsvärdet existerar. Vi får då att derivatan bestäms av

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\ \frac{e^h - 1}{h} \to e^x$$

när $h \to 0$, vilket visar att

$$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x.$$

2. *Bestäm gränsvärdet*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sin x)^2}{1 - \cos x}\ .$$

Vi har Maclaurinutvecklingarna

$$\begin{aligned} \sin x &= x + B_1(x)x^3, \\ \cos x &= 1 - x^2/2 + B_2(x)x^4, \end{aligned}$$

där B_1 och B_2 är begränsade funktioner. Med en ny begränsad funktion B_3 får vi

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} &= \frac{\big(x + B_1(x)x^3\big)^2}{x^2/2 - B_2(x)x^4} \\ &= \frac{x^2 + B_3(x)x^4}{x^2/2 - B_2(x)x^4} \\ &= \frac{1 + B_3(x)x^2}{1/2 - B_2(x)x^2} \\ &\to 2 \end{aligned}$$

när $x \to 0+$.

3. *Lös differentialekvationen*

$$z''(t) + 3z(t) = 1$$

med begynnelsdata $z(0) = z'(0) = 0$.

Den karakterisktiska polynomekvationen är $r^2+3=0$, som har lösningarna $r=\pm i\sqrt{3}$. Detta ger de homogena lösningarna $z_h = A\cos(\sqrt{3}t) + B\sin(\sqrt{3}t)$, för godtyckliga konstanter A och B. Den allmänna lösningen är $z = z_h + z_p$, där z_p är en partikulär lösning. Ansatsen $z_p = C$ där C är en konstant ger

$$C'' + 3C = 1$$

med lösningen $C = 1/3$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= z(0) = A + 1/3 \\ 0 &= z'(0) = \sqrt{3}B\cos(\sqrt{3}\cdot 0) \end{aligned}$$

som har lösningen $A = -1/3,\ B = 0$ och vi får differentialekvationens lösning

$$z(t) = \frac{1-\cos(\sqrt{3}x)}{3}.$$

4. *Skissera kurvan $e^x y = x - 1$ och ange lokala och globala extrempunkter, nollställen och gränsvärden för funktionskurvan y som funktion av x.*

Vi får $y(x) = (x-1)e^{-x}$, som har nollstället $x = 1$ och gränsvärdet 0 när $x \to +\infty$ och gränsvärdet $-\infty$ när $x \to -\infty$.

Derivering visar att

$$y'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x} = (2-x)e^{-x}$$

vilket ger nollstället $x = 2$. Vi får då teckenschemat nedan och skissen i Figur 1

Teckenschema

x		2	
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$

Vi ser att funktionen y har ett globalt maximivärde $y(2) = e^{-2}$ och gränsvärdet $-\infty$ när $x \to -\infty$ och gränsvärdet 0 när $x \to +\infty$.

5. *Beräkna $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{x+1}dx$. Tips: Använd variabelsubstitution $u = x+1$.*

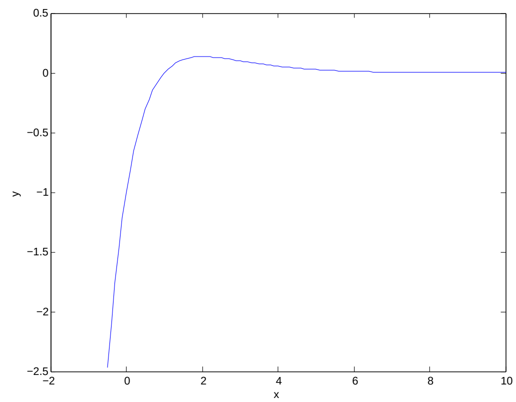

FIGURE 1. Kurvan $e^x y = x - 1$

Variabelbytet $u = x + 1$ ger gränserna $u = 0$, $u = 1$ och integralen

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} x^2(x+1)^{1/2}dx &= \int_0^1 (u-1)^2 u^{1/2} du \\ &= \int_0^1 (u^2 - 2u + 1)u^{1/2} du \\ &= [2u^{7/2}/7 - 4u^{5/2}/5 + 2u^{3/2}/3]_0^1 \\ &= \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{105}.\end{aligned}$$

6. *Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår när ytan definierad av*

$$0 \le y \le \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

roterar omkring **y***-axeln.*

Tvärsnittsarean blir $A(y) = \pi x^2(y)$, där $(1+x^2(y))^{-2} = y$. Gränsytan ger att $x^2(y) = y^{-1/2}-1$, för $0 < y \le 1$. Volymen, V, är integralen av tvärsnittsarean från $y = 0$ till $y = 1$ och vi får

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)dy \\ &= \pi \int_0^1 (y^{-1/2} - 1)dy \\ &= \pi[2y^{1/2} - y]_0^1 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

7. *Härled uttrycket*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

för längden av en längden av en kurva $\{(x, y)\ :\ a \le x \le b,\ y = f(x)\}$ *med hjälp av gränsvärde av små längdelement, för ett givet intervall* (a, b) *och en given derivarbar funktion* f *på intervallet.*

Se boken.

8a. *Hur många reella lösningar har ekvationen*

$$x^3 + 3x - 1 = 0?$$

8b. *Bestäm också närmvärden till lösningarna med noggranheten* $1/2$*.*

Funktionen $y(x) = x^3 + 3x - 1$ har derivatan $y'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ som är positiv för alla x. Funktionen y är därför strängt växande. Vi ser att $y(0) = -1$ och $y(1) = 3$. Eftersom y är kontinuerlig och strängt växande finns det precis ett nollställe och det ligger i intervallet $(0, 1)$.

Vi har $y(1/2) = 2^{-3} + 3/2 - 1 = 5/8 > 0$, så nollstället är i intervallet $(0, 1/2)$.

9. *Bestäm alla kurvor* $(x, f(x))$ *där tangenten i en godtycklig punkt* $(x, f(x))$ *skär* x*-axeln i punkten* $(2x, 0)$*.*

Tangenten y i en punkt $(x_0, f(x_0)$ har ekvationen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Villkoret $y(2x_0) = 0$ ger
$$-f(x_0) = f'(x_0)x_0.$$
Detta är en separabel differentialekvation som har lösningen
$$\int \frac{df}{f} = -\int \frac{dx_0}{x_0}$$
vilket ger $\ln|f| = -\ln|x_0| + \ln C'$ för en godtycklig positiv konstant C', så vi har $|f(x_0)| = C'/|x_0|$. Vi ser att kurvorna som söks beskrivs av $f(x_0) = C/x_0$ för en godtycklig reell konstant C, där x_0 är ett reellt tal skilt från noll, när C är skilt från noll och $f(x_0) = 0$ för alla reella x_0 när $C = 0$.

10. *Bevisa att en likformigt kontinuerlig funktion är integrerbar över ett begränsat intervall.*
Se boken.

9. BIOK *Avgör om serien* $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-3n}$ *är konvergent eller divergent. Tips: Jämför serien med en integral.*

Definiera den positiva funktionen $f(x) = xe^{-3x}$ för $x > 0$. Vi har $f'(x) = e^{-3x}(1-3x)$, vilket medför att f' är negativ för $x > 1/3$ och därför är f strängt avtagande för $x > 1/3$.

Att f är strängt avtagande ger oss
$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)dx > \sum_{n=2}^{\infty} f(n).$$
För att visa att summan är konvergent behöver vi bara verifiera att integralen är uppåt begränsad, eftersom summan består av positiva termer. Integralen går att räkna ut explicit med partiell integration, men enklare är att använda att $x < e^x$, så $\int_1^{\infty} f(x)dx < \int_1^{\infty} e^{-2x}dx = 1/2$.

10. BIOK *Bestäm ett Taylorpolynom av grad två som bäst approximerar funktionen*
$$f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2}dt$$
kring punkten $x = 1$.

Taylorpolynomet av grad två kan skrivas
$$f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)(x-1)^2/2.$$
Vi har $f(1) = 0$ och derivering med kedjeregeln och huvudsatsen ger
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt = 2xe^{-x^4}$$

så att $f''(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4e^{-x^4} = e^{-x^4}(2-8x^4)$, vilket ger $f'(1) = 2e^{-1}$ och $f''(1) = -6e^{-1}$. Taylorpolynomet som approximerar f med felet $B(x)(x-1)^3$, kring $x = 1$, där B är en begränsad funktion är

$$e^{-1}\big(2x - 2 - 3(x-1)^2\big).$$