KTH Matematik
Examinator Maria Saprykina

Tentamen i SF1644, Analys i en variavel 7/12-2009
Svar / Lösningsförslag.

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontrollskrivinigar. Den som är godkänd på kontrollskrivning nummer k har automatiskt 4 poäng på uppgift nummer k, $k = 1, 2$ eller 3, som då inte ska lösas. Varje 2 godkända hemuppgifter ger 1 bonuspoäng till tentamen. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

G-uppgifter

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet till funktionen $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

Lösning. En kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsad intervall antar sitt största och minsta värde. De antas i intervallets ändpunkter eller i punkter där derivatan är 0, eller i punkter där derivatan är odefinierad. $f'(x) = x^4 - 2x^5 = x^4(1 - 2x)$. Derivatan är definierad överallt. $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och $x = 1/2$. Jämför värden: $f(-1) = -8/15$, $f(1) = -2/15$, $f(1/2) = 1/960 > 0$, $f(0) = 0$. Största värdet: $f(1/2) = 1/960$ och minsta värdet: $f(-1) = -8/15$. På det öppna intervallet $(-1, 1)$ största värdet är samma som ovan, minsta värdet saknas.

2. Använd partialbråksuppdelning för att bestämma samtliga primitiva funktioner till $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

Lösning. Ansats: $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. Skriver om uttrycket ovan till samma nämnare, och bestämmer konstanterna: $A = -3$, $B = 4$.

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}dx = -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C$$

där C är en godtycklig konstant.

3. Bestäm det andragradspolynom som bäst approximerar funktionen $f(x) = x\sin x$ kring punkten $x = \frac{\pi}{2}$.

Lösning. Det sökta polynomet är Taylorpolynom $p(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f''(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})^2$. Vi har:

$$p(x) = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}\pi(x - \frac{\pi}{2})^2 = x - \frac{1}{4}\pi(x - \frac{\pi}{2})^2$$

4. Låt $g(x)$ vara en kontinuerlig funktion som uppfyller $\displaystyle\int_2^6 g(x)dx = 4$, $\displaystyle\int_6^{10} g(x)dx = -1$. Beräkna

a). $\displaystyle\int_2^{10} -3g(x)dx = -3\left(\int_2^6 g(x)dx + \int_6^{10} g(x)dx\right) = -3(4-1) = -9;$

b). $\displaystyle\int_1^3 g(2x)dx = [u = 2x,\ du = 2dx;\ x = 1 \Leftrightarrow u = 2,\ x = 3 \Leftrightarrow u = 6] = \frac{1}{2}\int_2^6 g(u)du = \frac{1}{2}4 = 2.$

c). $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(u)du = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$

5. Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 5\sin x$.
a). Verifiera att $y(x) = \sin x - 2\cos x$ är en lösning till differentialekvationen;
b). Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen;
Lösning. Den karakteristiska ekvationen $r^2+2r+2=0$ har rötter $r = -1 \pm i$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_H(x) = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Observera att en partikulär lösning till den ursprungliga icke-homogena ekvationen är given ovan: $y_p(x) = \sin x - 2\cos x$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \sin x - 2\cos x.$$

c). Beskriv alla lösningar till denna ekvation som uppfyller $y(0) = 0$.
Insättning $y(0) = (C_1\cos 0 + C_2\sin 0) + \sin 0 - 2\cos 0 = C_1 - 2 = 0$ medför: $C_1 = 2$. Alla lösningar som uppfyller $y(0) = 0$ beskrivs därför av

$$y(x) = e^{-x}(2\cos x + C_2\sin x) + \sin x - 2\cos x.$$

6 a). Förklara varför volymen av den kropp som uppstår då området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln, $a \le x \le b$, roterar kring x-axeln ges av formeln $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.
Se Persson och Böjers.
b). Använd formeln ovan för att beräkna volymen som uppstår då området mellan kurvan $y = \cos x$ och x-axeln, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ roterar kring x-axeln.
Lösning. Insättning i formeln ovan ger:

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

7. I en behållare finns 100 liter vatten i vilken $Y_0 = 500$ gram salt lösts upp. Vid en viss tidpunkt börjar behållaren fyllas på med vätska i takt av 4 liter per minut, där varje liter innehåller 5 gram salt. Samtidigt tappas den väl blandade vätskan i behållaren ut i takt av 4 liter per minut. Följande matematiska modell har föreslagits för att beskriva förloppet: om $y(t)$ betyder mängden salt i behållaren vid tidpunkten t minuter efter kranerna öppnats, så gäller att

$$y'(t) = 20 - \frac{1}{25}y(t).$$

a). Lös begynnelsevärdesproblemet ovan.
Lösning. Begynnelsevärdet är $y(0) = 500$. Ekvationen har form $y'(t) + \frac{1}{25}y(t) = 20$. Multiplisera ekvationen med en integrerande faktor $e^{\int \frac{1}{25}dx} = e^{\frac{1}{25}x}$:

$$\left(y(t)e^{\frac{1}{25}x}\right)' = 20e^{\frac{1}{25}x}.$$

Då

$$y(t)e^{\frac{1}{25}x} = \int 20e^{\frac{1}{25}x}dx = 500e^{\frac{1}{25}x} + C$$

där C är en godtycklig konstant. Alla lösningar beskrivs av

$$y(t) = 500 + Ce^{-\frac{1}{25}x}$$

där C är en godtycklig konstant.

Begynnelsedata ger: $500 = y(0) = 500 + Ce^0$. Vi måste ha $C = 0$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges därför av

$$y(t) = 500.$$

(Tänk på att saltlösningen kommer in med koncentration 5 gram salt per liter, och koncentrationen av salt i behållaren vid tid 0 var också $\frac{500}{100} = 5$ gram salt per liter. Det är naturligt att koncentrationen av salt inte förändras med tiden, och därför $y(t) = 500 =$konstant.)
b). Hur mycket salt skulle vara i behållaren vid tid $t = 0$ (dvs, hur skulle Y_0 väljas) för att motsvarande begynnelsevärdesproblemet hade en konstant lösning?
Svar. Man ska ta $Y_0 = 500$ gram salt, se ovan.

8. Funktionen $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ är inte definierad i en viss punkt. Kan man definiera funktionen $f(x)$ i denna punkt så att den blir kontinuerlig överallt? Hur gör man det i så fall? Motivera ditt svar!
Lösning. Funktionen $f(x)$ är inte definierad i punkt $x = 0$, men kontinuerlig i alla andra punkter.
Vi säger att en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i punkt 0 om $\lim_{x\to 0} g(x)$ finns och är lika med $g(0)$.
Verifierar att $\lim_{x\to 0} f(x)$ finns:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2 + B(x)x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + B(x)x^2 = \frac{1}{2}.$$

Här $B(x)$ är en begränsad funktion.
Låt oss definiera $f(0) = \frac{1}{2}$. Med andra ord, vi betraktar funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{om } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Denna funktion är kontinuerlig överallt.

9. Förklara i vilken mening $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$ är en generaliserad integral. Beräkna integralen med hjälp av substitutionen $u = 1 - \sin x$.

Lösning. Integralen är generaliserad eftersom funktionen $\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ är odefinierad då $x = \frac{\pi}{2}$. Substitutionen $u = 1 - \sin x$ ger: $du = -\cos x dx$, $x \to 0 \Leftrightarrow u \to 1$, $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 u^{-1/2} du = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 u^{-1/2} du =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2[\sqrt{u}]_\varepsilon^1 = 2.$$

10. a). Använd Cauchys Integralkriterium för att visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ konvergerar.

Lösning. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{x^5}$. För summan ovan gäller: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Cauchys Integralkriterium säger att om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, positiv och avtagande, så summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och integralen $\int_{k=1}^{\infty} f(x)dx$ konvergerar eller divergerar samtidigt. För vår funktion $f(x)$ alla tre villkor är uppfyllda (verifiera!). Vi beräknar

$$\int_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{M\to\infty} \int_{k=1}^{M} \frac{1}{x^5} dx = \lim_{M\to\infty} (-\frac{1}{4M^{-4}} + \frac{1}{4}) = 1/4.$$

Denna integral konvergerar. Svar: serien i frågan konvergerar.

b). Använd t. ex. uppskattning av summor med integraler för att finna minsta antal termer i serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ som behövs för att approximera summan med ett fel $\leq \frac{1}{4}10^{-4}$.

Lösning. Observera att för varje n gäller:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5} + \int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx.$$

(Gör en bild). Det vill säga att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5} \leq \int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx.$$

Vi räknar som i punkt a): $\int_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \frac{1}{4n^4}$. För att denna integral vore $\leq \frac{1}{4}10^{-4}$ vi kan ta $n \geq 10$ (10 är minsta möjliga n). Det räker alltså att ta summan av 10 första termer av vår serie för att approximera summan med det önskade fellet.