KTH Matematik
Examinator Maria Saprykina

Tentamen i SF1644, Analys i en variavel 7/12-2009

Namn och personnummer:

Uppgifterna poängsätts med 4 poäng vardera. Uppgifterna 1 - 3 svarar mot kontrollskrivinigar. Den som är godkänd på kontrollskrivning nummer k har automatiskt 4 poäng på uppgift nummer k, $k = 1, 2$ eller 3, som då inte ska lösas. Varje 2 godkända hemuppgifter ger 1 bonuspoäng till tentamen. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng. Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX: 14 poäng.

G-uppgifter

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet till funktionen $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

2. Använd partialbråksuppdelning för att bestämma samtliga primitiva funktioner till $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

3. Bestäm det andragradspolynom som bäst approximerar funktionen $f(x) = x\sin x$ kring punkten $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Låt $g(x)$ vara en kontinuerlig funktion som uppfyller $\displaystyle\int_2^6 g(x)dx = 4$, $\displaystyle\int_6^{10} g(x)dx = -1$. Beräkna

a). $\displaystyle\int_2^{10} -3g(x)dx$;

b). $\displaystyle\int_1^3 g(2x)dx$.

c). $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(2x)dx$.

5. Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 5\sin x$.
a). Verifiera att $y(x) = \sin x - 2\cos x$ är en lösning till differentialekvationen;
b). Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen;
c). Beskriv alla lösningar till denna ekvation som uppfyller $y(0) = 0$.

6 a). Förklara varför volymen av den kropp som uppstår då området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln, $a \leq x \leq b$, roterar kring x-axeln ges av formeln $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.
b). Använd formeln ovan för att beräkna volymen som uppstår då området mellan kurvan $y = \cos x$ och x-axeln, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ roterar kring x-axeln.

7. I en behållare finns 100 liter vatten i vilken $Y_0 = 500$ gram salt lösts upp. Vid en viss tidpunkt börjar behållaren fyllas på med vätska i takt av 4 liter per minut, där varje liter innehåller 5 gram salt. Samtidigt tappas den väl blandade vätskan i behållaren ut i takt av 4 liter per minut. Följande matematiska modell

har föreslagits för att beskriva förloppet: om $y(t)$ betyder mängden salt i behållaren vid tidpunkten t minuter efter kranerna öppnats, så gäller att

$$y'(t) = 20 - \frac{1}{25}y(t).$$

a). Lös begynnelsevärdesproblemet ovan.
b). Hur mycket salt skulle vara i behållaren vid tid $t = 0$ (dvs, hur skulle Y_0 väljas) för att motsvarande begynnelsevärdesproblemet hade en konstant lösning?

8. Funktionen $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ är inte definierad i en viss punkt. Kan man definiera funktionen $f(x)$ i denna punkt så att den blir kontinuerlig överallt? Hur gör man det i så fall? Motivera ditt svar!

9. Förklara i vilken mening $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$ är en generaliserad integral. Beräkna integralen med hjälp av substitutionen $u = 1 - \sin x$.

10. a). Använd Cauchys Integralkriterium för att visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ konvergerar.

b). Använd t. ex. uppskattning av summor med integraler för att finna minsta antal termer i serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ som behövs för att approximera summan med ett fel $\leq \frac{1}{4}10^{-4}$.