KTH Matematik KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, SF1645, för Bio och K måndagen den 10/3 2008, kl. 8.00 - 13.00.

1. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,0,0),(1,1,0)$ och $(1,0,2)$.
Vi använder formeln $T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|/2$ där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ år sidvektorer till triangeln. Välj $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,0,2)$.
Man får $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,-2,-1)$.
$T = |(2,-2,-1)|/2 = \underline{3/2}$.

2. Bestäm c så att ekvationssystemet

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x - 11y + cz = 0 \\ (2) & \quad\quad\; y + z = 0 \\ (3) & -x \quad\quad - 2z = 0. \end{array}$$

får oändligt många lösningar samt bestäm dessa.

Ekvation (2) och (3) ger $x = -2t,\ y = -t,\ (z = t)$.
För att detta skall vara de oändligt många lösningarna måste (1) vara identiskt uppfylld vid insättning:
(1) $3(-2t) - 11(-t) + ct = 5t + ct = (5 + c)t$ vilket är identiskt $= 0$ då $c = -5$. Svar: $\underline{c = -5 \text{ ger } x = -2t,\ y = -t\ z = t}$.
Anm: Problemet kan också lösas genom att man beräknar systemmatrisens determinant $(5+c)$ och sätter denna =0, samt löser systemet med Gausselimination för $c = -5$.

3. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Jacobis metod ger:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

V.g. vänd!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Svar: $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. Bestäm spegelpunkten till punkten $(1,2,-1)$ relativt planet $x + 2y + 5z = 60$.
Vi bildar linjen som går genom den givna punkten P och är vinkelrät mot planet. Som linjens riktningsvektor kan planets normalvektor väljas.
$\mathbf{r} = (1,2,-1) + t(1,2,5) = (1+t, 2+2t, -1+5t)$.
Vi söker skärningspunkten mellan linjen och planet (eller snarare t-värdet för denna skärningspunkt) och sätter därför in linjens koordinater i planets ekvation:
$1 + t + 2(2+2t) + 5(-1+5t) = 60, \quad t(1+4+25) + 1 + 4 - 5 = 60,$
$30t = 60, \quad t = 2.$
I punkten $(1,2,-1)$ är $t = 0$. Punkten P svarar mot $t = 2$.
Spegelpunkten Q svarar därför mot $t = 4$. Man får Q: $\underline{(5,10,19).}$

5. Diagonalisera nedanstående matris

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

om detta är möjligt. Om inte, förklara varför.

Vi undersöker egenvärdena och egenvektorerna. Först egenvärdena:
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 0 - 2(2-\lambda-1) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda) - 2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$ ger $\lambda_1 = 1$ (dubbelt) och $\lambda_2 = 4$.

Egenvektorer svarande mot $\lambda_1 = 1$ är lösningar till systemet :

$$\begin{aligned} 2y &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned} \qquad d.v.s. \qquad \begin{aligned} y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

vilket ger $x = t,\ y = 0,\ z = -t, \qquad \mathbf{v_1} = t(1, 0, -1)^t$.
Detta är $\underline{\text{den enda linjärt oberoende egenvektorn}}$ som svarar mot det dubbla egenvärdet $\lambda_1 = 1$.
Slutsats: Det finns inte 3 stycken linjärt oberoende egenvektorer till matrisen.
Därför är matrisen $\underline{\text{inte diagonaliserbar.}}$ (3p)

6. Anpassa i minstakvadratmetodens mening en rät linje till punkterna $(-1, -1), (0, 1)$ och $(2, k)$. (k är en parameter).
Ange också det k-värde som ger exakt anpassning.

Vi sätter in de givna punkterna i ekvationen för en rät linje $ax + b = y$.

Man får $\begin{aligned} -a + b &= -1 \\ b &= 1 \\ 2a + b &= k \end{aligned}$ Metoden med normalekvationer ger ett lösbart system för a och b i stället för ovanstående överbestämda system:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ k \end{pmatrix}$$

Man får, ex.vis med Cramers regel: $a = (5k + 3)/14, \quad b = (3k - 1)/14$
och alltså den bäst anpassade räta linjen: $\underline{y = \dfrac{5k + 3}{14}x + \dfrac{3k - 1}{14}}$.
Man ser att för $\underline{k = 5}$ ligger de tre punkterna i rät linje, varför överensstämmelsen med motsvarande linje, $y = 2x + 1$, blir exakt.

V.g. vänd!

7. Matrisen $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 9$ där 9 är ett dubbelt egenvärde. Bestäm en ON-matris som diagonaliserar C och ange motsvarande diagonaliserade matris.

Vi bestämmer tre ortogonala egenvektorer (sådana finns eftersom matrisen är symmetrisk) och bildar ON-matrisen genom att använda de normerade egenvektorerna som kolumner.

Egenvektorn som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 0$:
Lös systemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

Man får $x - y - 4z = 0$, $\quad y + 2z = 0$.

Med $z = t$ erhålles $y = -2t, x = y+4t = -2t+4t = 2t$ och $\mathbf{v_1} = (2, -2, 1)^t$.

Eftersom $\lambda_2 = 9$ är ett dubbelt egenvärde kommer det att finnas två motsvarande linjärt oberoende egenvektorer.
Lös systemet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Man ser att alla tre ekvationerna är identiska med $2x - 2y + z = 0$
Egenvektorerna hörande till $\lambda_2 = 9$ bildar alltså detta plan (egenrum). Notera att planets normal har samma riktning som $\mathbf{v_1}$ eftersom $\mathbf{v_1}$ är ortogonal mot alla egenvektorer som svarar mot $\lambda_2 = 9$. Välj exempelvis $\mathbf{v_2} = (1, 1, 0)^t$ (som uppfyller planets ekvation.
Nu måste man välja $\mathbf{v_3}$ i planet så att $\mathbf{v_3}$ och $\mathbf{v_2}$ blir ortogonala. Man kan exempelvis ta $\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$ vilket ger $\mathbf{v_3} = (-1, 1, -4)^t$.
Till slut placerar man de normerade versionerna av egenvektorerna $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ som kolumn 1,2 resp. 3 i en matris som blir den sökta ON-matrisen:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6 \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6 \\ 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande diagonaliserade matris blir $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Notera att flera ON-matriser är möjliga.

8. Matrisen M har egenvärdena $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$ och $\lambda_3 = -1/3$.
$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ är tre motsvarande egenvektorer.
En följd vektorer $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ...$ definieras av att $\mathbf{a_{n+1}} = M\mathbf{a_n}$ och att $\mathbf{a_0} = \mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3}$. Visa att följden $\{\mathbf{a_n}\}$ konvergerar mot $\mathbf{v_1}$, då $n \to \infty$.

Villkoret $\mathbf{a_{n+1}} = M\mathbf{a_n}$ ger att $\mathbf{a_n} = M^n\mathbf{a_0} = M^n(\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3})$.
Allmänt gäller att om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till M svarande mot egenvärdet λ, så gäller $M^n\mathbf{v} = M^{n-1}\lambda\mathbf{v} = ... = \lambda^n\mathbf{v}$.
Därför blir $\mathbf{a_n} = 1^n\mathbf{v_1} + 2(1/2)^n\mathbf{v_2} + 3(-1/3)^n\mathbf{v_3}$ och
$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n} = 1 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} + 0 \cdot \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1}$. VSB