KTH Matematik

Tentamen i Linjär algebra, SF1645, för Bio och K
måndagen den 10/3 2008, kl. 8.00 - 13.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.
För betyg E (godkänt) krävs minst 12 poäng inklusive bonuspoäng.
Om 10p uppnås finns möjlighet ett komplettera. Kontakta i så fall kursledare.
Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(0,0,0),(1,1,0)$ och $(1,0,2)$. (3p)

2. Bestäm c så att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x - 11y + cz &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -x \qquad - 2z &= 0. \end{aligned}$$

får oändligt många lösningar samt bestäm dessa. (3p)

3. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3p)

4. Bestäm spegelpunkten till punkten $(1,2,-1)$ relativt planet $x+2y+5z=60$. (3p)

5. Diagonalisera nedanstående matris

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

om detta är möjligt. Om inte, förklara varför. (3p)

V.g. vänd!

6. Anpassa i minstakvadratmetodens mening en rät linje till punkterna $(-1,-1),(0,1)$ och $(2,k)$. (k är en parameter).
Ange också det k-värde som ger exakt anpassning. (3p)

7. Matrisen $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 9$ där 9 är ett dubbelt egenvärde. Bestäm en ON-matris som diagonaliserar C och ange motsvarande diagonaliserade matris. (3p)

8. Matrisen M har egenvärdena $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$ och $\lambda_3 = -1/3$.
$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ är tre motsvarande egenvektorer.
En följd vektorer $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots$ definieras av att $\mathbf{a_{n+1}} = M\mathbf{a_n}$ och att $\mathbf{a_0} = \mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3}$. Visa att följden $\{\mathbf{a_n}\}$ konvergerar mot $\mathbf{v_1}$, då $n \to \infty$.

(3p)