# Lösningar till SF1645, 080531

1. Låt $\vec{v} = (0,0,1)^t$, $\vec{w} = (3,-4,5)^t$ och bilda $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (4,3,0)^t$. Punkten $P_1 = (1,2,0)^t$ ligger på linjen $x = 1+3t,\ y = 2-4t,\ z = 5t$ och $P_2 = (0,0,0)^t$ ligger på $z$-axeln. Om vi låter $\vec{u} = P_1 - P_2 = (1,2,0)^t$ ges avståndet mellan linjerna av

$$\frac{|(\vec{n} \cdot \vec{u})|}{|\vec{n}|} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2.$$

2. Skärningen mellan linjen och planet är tom omm ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ej har lösningar. Meddelst radoperationer får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som ej har någon lösning. Linjerna skär således ej varandra.

3. Eventuella egenvärden för $A$ ges av rötterna till

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4,$$

som har lösningarna $\lambda = -1, 3$. Eftersom $A$ har två olika egenvärden är $A$ diagonaliserbar och $D_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Egenvärden för $B$ ges av rötterna till

$$0 = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2,$$

som endast har dubbelroten $\lambda = 1$. Lösningrummet till

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ges av $x_1 = t, x_2 = 0$, och är således endimensionellt. Alltså är $B$ ej diagonaliserbar.

4. Sarrus regel ger

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 10 + 12 = 0.$$

Egenvärdena till $A$ ges av lösingarna till

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(3+\lambda)+2(2-\lambda)-10+4(3+\lambda) = \lambda(9-\lambda^2),$$

och vi får alltså $\lambda = 0, -3, 3$.

Eftersom $\det(A^t - \lambda I) = \det((A-\lambda I)^t) = \det(A - \lambda I)$ har även $A^t$ egenvärdena $\lambda = 0, -3, 3$.

5. Kolonnvektorerna i $A$ fås genom att bestämma bilden av enhetsvektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Eftersom

$$(1,0,0)^t \to (0,0,1)^t, \quad (0,1,0)^t \to (1,0,0)^t, \quad (0,0,1)^t \to (0,1,0)^t$$

får vi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sarrus regel ger nu att $\det(A) = 1$.

6. Eftersom $\det(A) = -3$ och $\det(B) = 1$, är både $A, B$ inverterbara, och vi får

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Vi söker $k$ så att ekvationssystemet $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ har en icke-trivial lösing. Meddelst radoperationer får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och vi finner att icke-trivial lösning finns omm $k = 1/2$.

8. (a) Egenvärdena till $A$ fås genom att lösa

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9$$

och vi får $\lambda = 5, -1$. Enligt 8b ges egenvärdena till $K^{-1}$ då av $1/5, -1$.

(b) Om $A$ är inverterbar kan $\lambda = 0$ ej vara ett egenvärde. Antag nu att $\lambda \neq 0$ är ett egenvärde, med motsvarande egenvektor $\vec{v}$, dvs $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Vi får då att

$$A^{-1}A\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}$$

dvs $A^{-1}\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{v}$. Således är $\vec{v}$ en egenvektor till $A^{-1}$ med egenvärde $\lambda^{-1}$.