Institutionen för matematik
KTH

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN SF1645
LINJÄR ALGEBRA FÖR I1, CBIOT1 OCH CKEMV1
Onsdagen den 11 mars, 2009, kl. 08.00-13.00

1. (a) $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (2,1,2)$, $P_3 = (3,2,1)$.

$$\overline{v}_1 := \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v}_2 := \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Låt $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vektorn $\overline{n}$ är normal till planet π. Punkten $P_1 = (1,0,1) \in \pi$. Planets ekvation ges därför av

$$1(x-1) - 1(y-0) + 0(z-1) = 0 \iff \underline{x - y - 1 = 0}.$$

(b) $P = (4,0,1)$. Enligt formel från boken (se Exempel 1.51) så ges sökt avstånd av

$$d = \frac{|4-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}.$$

Alternativt:

$$(4,0,1) + t(1,-1,0) \in \pi \Leftrightarrow (4+t,-t,1) \in \pi \Leftrightarrow 4+t-(-t)-1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$$

Därför ges sökt avstånd av

$$d = |t(1,-1,0)| = \frac{3}{2}|(1,-1,0)| = \underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}.$$

2. (a) $\det A = 12+2a-12-a^2 = -(a^2-2a) = -a(a-2)$. Det följer att $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ och $a \neq 2$. Alltså är A inverterbar om $\underline{a \neq 0 \text{ och } a \neq 2}$.

(b) Låt $a = 1$. Då är $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Eftersom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right), \text{ så följer att } \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

3. (a) Ekvationen $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \lambda_3\overline{v}_3 = \overline{0}$ är ekvivalent med

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sätt $\lambda_3 = t$, så fås att $\lambda_2 = 2t$, $\lambda_1 = -3t$. Alltså finns icke-triviala lösningar, så vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ är <u>linjärt beroende</u>.

(b) Ekvationen $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \lambda_3\overline{v}_3 = \overline{v}$ är ekvivalent med

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Lösning saknas. <u>Nej</u>, vektorn $\overline{v}$ kan ej skrivas som en linjärkombination av $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$.

4. $y = a + bx$. Insättning av punkterna ger det överbestämda systemet

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ a + 2b = 7 \\ a + 3b = 14 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$. Systemet kan då skrivas $A\overline{x} = \overline{b}$.
Normalekvationerna lyder:

$$A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}.$$

Enkel räkning ger att

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 62 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationerna tar därför formen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 27 \\ 6 & 14 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 27 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right),$$

så $b = 4$ och $a = \frac{27-6\cdot 4}{3} = 1$. Ekvationen $y = 1+4x$ ansluter bäst i minstakvadratmening.

5. (a)

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -18 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-5-\lambda)(10-\lambda)+54 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ eller } \lambda = 4$$

$\underline{\lambda = 1}$: $(A-\lambda I)\overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ -18 & 9 & 0 \end{array}\right)$, så $\overline{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är egenvektor till A med egenvärde $\lambda = 1$.

$\underline{\lambda = 4}$: $(A-\lambda I)\overline{x} = \overline{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ -18 & 6 & 0 \end{array}\right)$, så $\overline{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, är egenvektor till A med egenvärde $\lambda = 4$.

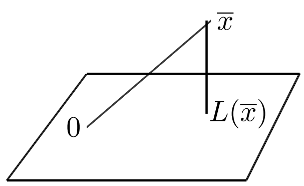
Låt $\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$. Då blir $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

d.v.s. $A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$.

(b) Låt $B = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$. Då är $B^2 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} = A$. Denna matris B duger alltså. Mera explicit fås att

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}}.$$

6. Betrakta Figur 1 nedan.



Figur 1: Den ortogonala projektionen $L(\overline{x})$ av vektorn $\overline{x}$ på planet π.

Projektionsformeln ger att

$$L(\overline{x}) = \overline{x} - \frac{\overline{x}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\,\overline{n},$$

där $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det följer att

$$L(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 - \frac{\overline{e}_1 \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 2/6 \\ -1/6 \end{pmatrix},$$

$$L(\overline{e}_2) = \overline{e}_2 - \frac{\overline{e}_2 \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 \\ 2/6 \\ 2/6 \end{pmatrix},$$

$$L(\overline{e}_3) = \overline{e}_3 - \frac{\overline{e}_3 \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ 5/6 \end{pmatrix},$$

d.v.s. L:s matris är $\begin{pmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{pmatrix} = \underline{\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$.

Alternativt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y-2t \\ z+t \end{pmatrix} \in \pi \iff x + t - 2(y-2t) + z + t = 0$$

$$\iff x - 2y + z + t(1+4+1) = 0 \iff t = -\frac{1}{6}(x - 2y + z)$$

Det följer att

$$L(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(x-2y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6}x + \frac{2}{6}y - \frac{1}{6}z \\ \frac{2}{6}x + \frac{2}{6}y + \frac{2}{6}z \\ -\frac{1}{6}x + \frac{2}{6}y + \frac{5}{6}z \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

7. Låt $\overline{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$. Då gäller att

$$\overline{x}(n+1) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.3 & 1.3 \end{pmatrix}\overline{x}(n) = A\overline{x}(n).$$

Vidare är $\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Den karaktäristiska ekvationen lyder

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.6 \\ -0.3 & 1.3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7) = 0.$$

Egenvärdena är därför $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.7$. Enkel räkning ger vidare att

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ respektive } \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är egenvektorer svarande mot egenvärdena $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 0.7$. Vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A. Vi har att

$$c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 = \overline{x}(0) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

d.v.s. $c_2 = -1$ och $c_1 = 4$. Det följer att

$$\begin{aligned} \overline{x}(n) &= A\overline{x}(n-1) = ... = A^n\,\overline{x}(0) = A^n(c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2) = \\ &= c_1\lambda_1^n\,\overline{v}_1 + c_2\lambda_2^n\,\overline{v}_2 = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (0.7)^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

då $n \to \infty$. Alltså: $\underline{x(n) \to 4 \text{ och } y(n) \to 4, \text{ då } n \to \infty}$.

8. Notera först att

$$AXA = AX + I \Leftrightarrow AXA - AX = I \Leftrightarrow AX(A-I) = I$$

Vi har att

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enkel räkning ger att både A och $A - I$ är inverterbara, samt att

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \\ (A-I)^{-1} &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det följer att

$$X = A^{-1}(A-I)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}.$$