Institutionen för matematik
KTH

Tentamen SF1645
Linjär algebra för I1, CBIOT1 och CKEMV1
Onsdagen den 11 mars, 2009, kl. 08.00-13.00

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, som ger totalt högst 24 poäng. För betyg Fx krävs 40%, för E krävs 45%, för D krävs 55%, för C krävs 65%, för B krävs 75% och för A krävs 85%. (Inlämningsuppgifterna är värda 20%, och tentamen 80%.)
Lösningarna skall motiveras väl.
Maximalt en uppgift per blad.

1. Ett plan π innehåller punkterna $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (2, 1, 2)$ och $P_3 = (3, 2, 1)$.
   (a) Bestäm planets ekvation på formen $Ax + By + Cz + D = 0$. (2p)
   (b) Bestäm avståndet d från punkten $\mathrm{P} = (4, 0, 1)$ till π. (1p)

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & a & 6 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestäm de reella konstanter a för vilka matrisen A är inverterbar. (1p)
   (b) Bestäm A^{-1} i fallet att $a = 1$. (2p)

3. (a) Avgör om
$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$. (2p)
   (b) Kan vektorn
$$\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   skrivas som linjärkombination av vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$? (1p)

V.G.V.

4. Bestäm den linje $y = a + bx$ som i minstakvadratmening bäst ansluter sig till punkterna $(1, 6)$, $(2, 7)$ och $(3, 14)$. (3p)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen A.
   Skriv även A på formen $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris. (2p)

   (b) Bestäm en matris B sådan att $A = B^2$.
   Ledning: $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. (1p)

6. Låt $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\pi :\ x - 2y + z = 0$.
Bestäm avbildningen L:s matris (i standardbasen). (3p)

7. Låt $x(n)$ beteckna antalet hajar (i hundratal) och låt $y(n)$ vara antalet tonfiskar (i tiotusental) i en bukt vid tidpunkten n.
Antag att marinbiologerna har fastställt att följande samband gäller:

$$\begin{cases} x(n+1) &= &0.4\,x(n) &+ &0.6\,y(n) \\ y(n+1) &= &-0.3\,x(n) &+ &1.3\,y(n) \end{cases}$$

och att $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.
Vad händer med populationerna av hajar och tonfiskar då $n \to \infty$? (3p)

8. En 2×2-matris X satisfierar ekvationen

$$AXA = AX + I,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen X. (3p)