Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2008-05-21

1) a) Tangentplanets ekvation ges av

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0.$$

Nu är $\operatorname{grad} f = (4x^3 + 2xy^2 + 2xz^2, 2x^2y, 2x^2z + 4z^3)$, varför $\operatorname{grad} f(1,1,1) = (8,2,6)$. Tangentplanets ekvation blir alltså $8(x-1) + 2(y-1) + 6(z-1) = 0$, vilket ger $4x + y + 3z = 8$.

Svar: $4x + y + 3z = 8$.

b) Funktionen växer snabbast i den riktning som ges av gradienten, dvs. i riktningen $(8,2,6) = 2(4,1,3)$.

Svar: I den riktning som ges av $(4,1,3)$.

2) a)$(1,1)$ är en stationär punkt ty

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 6xy^3 + y^6 + 1\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -9x^2y^2 + 6xy^5 + 3.\end{aligned}$$

vilket ger $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$.

b) Vi undersöker den kvadratiska formen $Q(h_1,h_2) = Ah_1^2 + 2Bh_1h_2 + Ch_2^2$, där $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$ och $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)$. Nu är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 6y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -18xy^2 + 6y^5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -18x^2y + 30xy^4,$$

vilket ger $A = 6$, $B = -12$, $C = 12$ och följaktligen

$$Q(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 24h_1h_2 + 12h_2^2 = 6(h_1 - 2h_2)^2 - 12h_2^2.$$

Vi ser att Q är indefinit, varför $(1,1)$ är en sadelpunkt.

Svar: $(1,1)$ är en sadelpunkt.

3) Rotationsparaboloiden skär xy-planet då $1 - 4(x^2 + y^2) = 0$ dvs. i cirkeln $x^2 + y^2 = 1/4 = (1/2)^2$. Om $E: x^2 + y^2 \le 1/4$ så ges volymen av

$$V = \iint_E 1 - 4(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater. E ges av $0 \le r \le 1/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$ och vi har att $dxdy = rdrd\theta$. Detta ger

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} (1-4r^2) r\, dr \right) d\phi = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \right]_0^{1/2} \\ &= 2\pi (\frac{1}{8} - \frac{1}{16}) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{8}$.

4) En parametrisering av γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $0 \le t \le 1$ vilket ger $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$. Vi får

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (-4t^4, 0) \cdot (1,1) dt = -4 \int_0^1 t^4\, dt = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{4}{5}$.

5) Sätt $g(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 14$. Vi vill maximera $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Lagrange mutliplikatormetod, och det faktum att mängden är kompakt, ger att maximum antas i en punkt som satisfierar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 2 - \lambda(2x + y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 2 - \lambda(x + 4y) = 0, \end{aligned}$$

där λ är Lagrangemutliplikatorn. Vi ser att $\lambda = 0$ är omöjligt, varför $2x + y = 2/\lambda$, $x + 4y = 2/\lambda$, vilket ger $2x + y = x + 4y$, dvs. $x = 3y$. Insatt i bivillkoret ger detta $9y^2 + 3y^2 + 2y^2 = 14$, dvs. $y^2 = 1$ eller $y = \pm 1$. De tänkbara punkterna är alltså $(-3, -1)$ och $(3, 1)$. Vi se att maximum $= 8$ antas i $(3, 1)$.

Svar: Maximum 8 antas i $(3, 1)$.

6) Kroppens massa ges av

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Vi byter till rymdpolära koordinater (r, θ, ϕ). I rymdpolära koordinater ges K av $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le \pi$. Vi har Jacobianen $r^2 \sin\theta$ varför

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\int_1^2 \frac{e^{-r}}{r^2} r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \right) d\phi = \pi \left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_1^2 e^{-r}\, dr \right) \\ &= \pi \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \left[-e^{-r} \right]_1^2 = 2\pi(e^{-1} - e^{-2}). \end{aligned}$$

Svar: $2\pi(e^{-1} - e^{-2})$.

7) a) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}$$

vilket ger

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

På samma sätt får vi

$$y^2\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Alltså är

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Svar:$-\frac{\partial f}{\partial u}$

b) I de nya variableran blir ekvationen $-\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, vilket ger att $f = G(v)$ där G är en godtycklig C^1 funktion. Vi får $f(x, y) = G(1/y - 1/x)$.

Svar: $f(x, y) = G(1/y - 1/x)$ där G är en godtycklig C^1 funktion.

8) Sätt $P(x, y) = e^{3x}\cos 3y$, $Q(x, y) = -e^{3x}\sin 3y + x$. Då är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3e^{3x}\sin 3y + 1 - (-3e^{3x}\sin 3y) = 1.$$

Låt C vara linjestycket från -1 till 1 och D halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Då är $\partial D = \gamma + C$ och Greens formel ger

$$\begin{aligned}&\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_D 1\,dxdy = \text{area}\,(D) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

C parametriseras av $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $-1 \leq t \leq 1$, vilket ger $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$. Alltså är

$$\begin{aligned}\int_\gamma P\,dx + Q\,dy &= \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{1} e^{3t}\cdot 1 + t\cdot 0\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(e^3 - e^{-3}).\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(e^3 - e^{-3})$.

9) Låt $K_R: \ 0 \le x+y \le R\,,\ 0 \le x-y \le R$, där $R>0$. K_R tömmer ut K då $R \to \infty$. Vi inför nya koordinater genom $u = x+y$, $v = x-y$. Jacobianen ges av

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}.$$

I de nya variablerna ges K_R av $0 \le u \le R$, $0 \le v \le R$. formeln för variabelbyte i dubbelintegraler ger nu

$$\iint_{K_R} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2(1+x+y)^2} = \int_0^R \int_0^R \frac{1}{(1+u)^2(1+v)^2} \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^R \frac{du}{(1+u)^2}\right)\left(\int_0^R \frac{dv}{(1+v)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^R\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+R}\right)^2.$$

Då $R \to \infty$ konvergerar detta mot $\frac{1}{2}$.

Svar: Integralen konvergent med värdet $\frac{1}{2}$.