KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN SF1646
Analys i flera variabler, 6 hp för K1, BIO1
Onsdagen 21/5 2008 kl. 08-13

Hjälpmedel: Inga.

Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift framgår nedan. Godkänt på KS nr i ger automatiskt full poäng på tal nr i. 12 p ger säkert godkänt. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p.

1. Låt $f(x, y, z) = x^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + z^4$.

   a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 4$ i punkten $(1, 1, 1)$ (2p)

   b) I vilken riktning växer funktionen f snabbast? (1p)

2. Låt $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3 + xy^6 + x + 3y$.

   a) Visa att $(1, 1)$ är en stationär punkt till f. (1p)

   b) Vilken typ av stationär punkt till f är $(1, 1)$? (2p)

3. Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av xy-planet och rotationsparaboloiden $z = 1 - 4(x^2 + y^2)$. (3p)

4. En partikel som påverkas av kraftfältet $\mathbf{F}(x, y)$ rör sig längs kurvan γ från en punkt A till en punkt B. Kraften uträttar då ett arbete som ges av
$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$
   Beräkna arbetet W om $\mathbf{F}(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$ i lämpliga enheter och γ är linjen från $(0, 0)$ till $(1, 1)$. (3p)

5. Maximera $f(x, y) = 2x + 2y$ på den kompakta mängden som ges av ekvationen $x^2 + xy + 2y^2 = 14$ genom att använda Lagrangemultiplikatorer. (3p)

v.g.v.

6. Kroppen K ges av $K = \{(x, y, z)\,;\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\, y \geq 0\}$. Antag att K har en masstäthet som ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Beräkna massan av kroppen K. (3p)

7. a) Låt f vara en C^1 funktion. Transformera uttrycket

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

genom att införa de nya oberoende variablerna $u = 1/x$, $v = 1/y - 1/x$ i området $D = \{(x, y)\,;\, x > 0\,,\, y > 0\}$. (2p)

b) Använd resultatet i a) för att bestämma den allmänna C^1 lösningen i D till den partiella differentialekvationen

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(1p)

8. Låt γ vara halvcirkeln med centrum i origo från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma e^{3x} \cos 3y \, dx + (-e^{3x} \sin 3y + x)\, dy.$$

(3p)

9. Låt $K = \{(x, y)\,;\, x + y \geq 0\,,\, x - y \geq 0\}$. Visa att den generaliserade integralen

$$\iint_K \frac{dxdy}{(1 + x + y)^2 (1 + x - y)^2}$$

är konvergent och bestäm dess värde. (3p)

LYCKA TILL!