Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2008-08-21

1) Tangentplanet är horisontellt om $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ och $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, vilket ger $2x - 4y + 12 = 0$ och $-4x - 4y - 12 = 0$. Detta ekvationssystem har lösningen $x = -4, y = 1$, vilket ger z-koordinaten $z = -31$. Eftersom planet är horisontellt är z konstant i planet och planets ekvation blir $z = -31$.

Svar: $z = -31$

2) Funktionen är kontinuerligt deriverbar i hela det kompakta området och antar därför sitt största och minsta värde antingen i en stationär punkt inuti området eller i en randpunkt. Eftersom $\partial f/\partial y = -1 \neq 0$ så finns ingen stationär punkt. Randen består av tre delar $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$ (I), $y = x/2$, $0 \leq x \leq 1$ (II) och $x = 1$, $1/2 \leq y \leq 2$ (III). På (I) får vi $f(x, y) = x^2 - 2x$ som är maxinmal $= 0$ då $x = 0$ och minimal $= -1$ då $x = 1$. På (II) får vi $f(x, y) = x^2 - x/2$ som är maximal $= 1/2$ då $x = 1$ och minimal $= -1/16$ då $x = 1/4$. På (III) är $f(x, y) = 1 - y$ som är maximal $= 1/2$ då $y = 1/2$ och minimal $= -1$ då $y = 2$.

Svar: Minsta värde $= -1$ i $(1, 2)$. Största värde $= 1/2$ i $(1, 1/2)$.

3) Vi inför rymdpolära koordinater, $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$, $1 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Integralen blir då

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_1^3 \frac{r \sin\theta \cos\phi}{r^5} r^2 \sin\theta \, dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi \right) \left(\int_1^3 \frac{dr}{r^2} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2\pi}{3}$

4) MacLaurinutvecklingen $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ ger

$$f(x, y) \approx 2x + y + 2(1 - (x + 2y)^2) = 2 + 2x + y - x^2 - 4xy - 4y^2$$

för (x, y) nära $(0, 0)$. Detta ger

$$f(0.10, 0.20) \approx 2 + 2 \cdot 0.10 + 0.20 - 0.50^2 = 2.15.$$

Svar: 2.15

5) Arbetet ges av

$$W = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Förutsättningarna i Greens formel är uppfyllda och denna ger

$$W = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = \iint_D -1 - 1\, dxdy,$$

där D ges av $4x^2 + y^2 \leq 4$. Byte av variabler till $x = r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ ger

$$W = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 -2 \cdot 2r\, dr \right) d\theta = -4\pi,$$

ty Jacobianen är $2r$.

Svar: -4π.

6) Tetraedern beskrivs av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$ och upprepad integration ger

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-(x+y)} x + y\, dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)(1-(x+y))\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x + y - (x+y)^2\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\, dx \\
&= \left[\frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{12}$

7) Lå Γ beteckna spiralen. Massan ges av kurvintegralen (med avseende på båglängden)

$$\begin{aligned}
M &= \int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2 + \sin^2 t + b^2 t^2) \cdot |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \left[a^2 + b^2 \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = (2\pi a^2 + 8\pi^3 b^2/3)\sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

Svar: $(2\pi a^2 + 8\pi^3 b^2/3)\sqrt{a^2 + b^2}$

8) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta.$$

Mulitplikation med r ger

$$r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} r\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\sin\theta = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Svar: $r\frac{\partial f}{\partial r}$

9) a) Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Vi får för $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \\ &= \frac{|r^2\cos\theta\sin\theta|}{r} = r|\cos\theta\sin\theta| \leq r \to 0 \end{aligned}$$

då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, dvs. $(x, y) \to (0, 0)$. Alltså gäller

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

och vi har visat att f är kontinuerlig i $(0, 0)$.

b) Om $(x, y) \neq (0, 0)$ gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + xy\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Vi ser att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$$

för alla $x \neq 0$ medan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \frac{y^3}{y^3} = 1$$

för alla $y \neq 0$ varför $\frac{\partial f}{\partial x}$ ej är kontinuerlig i origo.