Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1646, Analys i flera variabler.
Tentamen, lördagen den 14 mars 2009. Lösningsförslag.

1. Bestäm ekvation för det tangentplan till ytan

$$3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$$

som är parallel med yz-planet d v s vinkelrät mot x-axeln (det kan finnas fler än ett sådant tangentplan).

Lösning. Alla plan parallela med yz-planet har ekvationer $x = \text{Const}$. Alternativt, normalvektor till sådana plan har y och z komponenter lika med 0. Normalvektor till ytan i form $F(x, y, z) = 0$ ges av gradienten till funktionen F och krav att tangentplan är parallel med yz-planet ger oss villkor $F'_y = F'_z = 0$.

För vår yta får vi

$$F'_y = -2x + 4y \quad \text{och} \quad F'_z = -2x + 4z.$$

Villkor $F'_y = F'_z = 0$ ger oss $y = x/2$ och $z = x/2$. Insättningen till ytansekvation ger

$$3x^2 - x^2 - x^2 + 1/2x^2 + 1/2x^2 = 8$$

eller $x^2 = 4$ varav $x = \pm 2$ är koordinater av de punkter där tangentplan är parallel med yz-planet. Eftersom tangentplan har ekvation $x = \text{Const}$, man behöver inte söka y och z och man får direkt två tangentplan $x = 2$ samt $x = -2$.

2. Vilken punkt på ellipsen

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 = 60$$

har största möjliga summan av koordinater x och y?

Lösning. Man skall maximisera funktionen $f(x, y) = x + y$ med bivillkor $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 60 = 0$. Lagrangesekvationer blir

$$\begin{cases} 1 = \lambda(4x + 2y); \\ 1 = \lambda(2x + 6y); \\ 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 60. \end{cases}$$

Division av den första ekvation med den andra ger oss

$$1 = \frac{4x + 2y}{2x + 6y}$$

varav $x = 2y$. Insättningen av detta till den tredje ekvation ger

$$8y^2 + 4y^2 + 3y^3 = 60$$

eller $y^2 = 4$ varav $y = \pm 2$. Alltså, det finns två misstänkta punkter där $f(x, y)$ kan anta sina extremvärdena: $(4, 2)$ samt $(-4, -2)$. Vi ser att $max(f(x, y)) = f(4, 2) = 6$.

3. Räkna ut trippelintegralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

där kroppen K begränsas av ytor $z = x^2 + y^2$ och $z = 1$.

Lösning. Vi använder oss av cylindriska koordinater: $x = r\cos\phi$; $y = r\sin\phi$; $z = z$. Kroppen ges då av olikheten $r^2 \le z \le 1$ och det finns inga begränsningar för ϕ d v s $0 \le \phi \le 2\pi$. Jakobian av koordinatbytet är r. Integralen blir

$$\iiint = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_0^1 r^2 \cdot r\, dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \cdot r^3 \cdot (1 - r^2) =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^3 - r^5)\, dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

4. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + ye^{x^2 - y}.$$

Bestäm även deras karaktär (d v s lokalt max eller min eller sadelpunkt eller något annat).

Lösning. Stationära punkter karakteriseras av villkor $f'_x = f'_y = 0$. Vi har

$$f'_x = 2x + 2xye^{x^2-y} \quad \text{och} \quad f'_y = (1 - y)e^{x^2-y}.$$

För stationära punkter får vi systemet

$$2x(1 + ye^{x^2-y}) = 0 \quad \text{och} \quad (1 - y)e^{x^2-y} = 0.$$

Den andra ekvationen ger oss $y = 1$ och insättningen till den första ekvationen ger $x = 0$. Alltså, det finns endast en stationär punkt $(0, 1)$.

För att undersöka dess karaktär, avnänder vi oss av andra derivator. Vi har

$$f''_{xx} = 2(1 + ye^{x^2-y}) + 4x^2ye^{x^2-y};$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x(1 - y)e^{x^2-y};$$

$$f''_{yy} = (y - 2)e^{x^2-y}.$$

Matris av andra derivator i punkten $(0, 1)$ blir då

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 + 1/e) & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix}.$$

Motsvarande kvadratiska formen har utseendet

$$Q(h, k) = 2(1 + 1/e)h^2 - k^2/e$$

och den är ej definit. Detta visar att punkten $(0, 1)$ är en sadelpunkt.

5. Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner $g(x, y)$ som uppfyller differentialekvation

$$y^3 g'_x + x^3 g'_y = 0$$

genom att införa nya variablerna

$$u = x^4 - y^4; \quad v = xy.$$

Lösning. Vi söker $g(x, y)$ i form

$$g(x, y) = G(u, v),$$

där $u = x^4 - y^4$ och $v = xy$. Vi har då enligt kedjeregeln

$$g'_x = 4x^3 G'_u + yG'_v \quad \text{och} g'_y = -4y^3 G'_u + xG'_v.$$

Detta ger oss

$$y^3 g'_x + x^3 g'_y = (y^4 + x^4)G'_v$$

och ekvationen blir $G'_v(u, v) = 0$. Den har lösningar

$$G(u, v) = h(u),$$

där h är godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Detta ger oss svar

$$g(x, y) = h(x^4 - y^4).$$

6. Beräkna integralen

$$\iint_D (x^2 + y)\, dx\, dy$$

där D är triangeln med hörn i punkter $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Lösning. Linjer som begränsar triangeln är $y = 0$ (d v s x-axeln), $y = 1 + x$ samt $y = 1 - x$. Triangeln ges då av olikheter $y - 1 \leq x \leq 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$. Integralen blir

$$\iint = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} dx \cdot (x^2 + y) = \int_0^1 dy \cdot \left(\frac{x^3}{3} + yx \right) \Big|_{x=y-1}^{x=1-y} =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}(1-y)^3 + 2y(1-y) \right) = \left(-\frac{1}{6}(1-y)^4 + y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

7. Beräkna massan av det ihåliga halv-klotet K som ges av olikheter

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9; \quad z \geq 0$$

om densiteten ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Lösning. Massan ges av trippelintegralen

$$\iiint_K \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

För att beräkna den, använder vi oss av rymdpolära koordinater, d v s

$$x = r\sin\psi\cos\phi; \quad y = r\sin\psi\sin\phi; \quad z = r\cos\psi.$$

Vi får då

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{och} \quad \rho(x, y, z) = \frac{1}{r^3}.$$

Jakobian blir $J = r^2 \sin\psi$. Olikheten $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ ger oss villkor $1 \le r \le 3$ och den övre (eller informellt den norra) halvklotet som vi sysslar med ger oss villkor $0 \le \psi \le \pi/2$. Massan ges då av integralen

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_1^3 \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \sin\psi \, dr =$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_1^3 \frac{\sin\psi}{r} \, dr = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\psi \cdot \ln 3 \, d\psi = 2\pi \ln 3.$$

8. En partikel som påverkas av kraften

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{x+1}, \frac{1-2y}{x+1} \right)$$

rör sig längs parabeln $x = y^2$ från punkten $(1, -1)$ till punkten $(1, 1)$. Beräkna det arbetet som kraften uträttar.

Lösning. Arbetet ges av kurvintegralen

$$A = \int_\gamma \left(P(x, y)dx + Q(x, y)dy \right),$$

där funktioner P och Q är komponenter av vektorfält $\mathbf{F}$ d v s i vårt fall $P(x, y) = \frac{1}{x+1}$; $Q(x, y) = \frac{1-2y}{x+1}$. För att räkna integralen, skall vi välja någon parametrisering av kurvan. Enklast är att ta y som parameter och då får vi parametriseringen $x = t^2$; $y = t$; $-1 \le t \le 1$. Integralen blir då

$$A = \int_\gamma \left(\frac{dx}{x+1} + \frac{1-2y}{x+1} \, dy \right) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t^2+1} \, d(t^2) + \frac{1-2t}{t^2+1} \, dt \right) =$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{2t}{t^1+1} + \frac{1-2t}{t^2+1} \right) dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t\Big|_{-1}^1 = \pi/2.$$

9. Räkna ut den generaliserade itererade integralen

$$\int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-x^2} \, dx \right) dy$$

genom att byta ordningen av integrering.

Lösning. Vi observerar att itererade integralen motsvarar till en viss dubbelintegral över något område i planet. För att bestämma området ser vi först på gränserna i inre integralen och de ger oss olikheten $y \le x$. Gränserna i yttre integralen ger oss dessutom olikheten $0 \le y$ och vi ser att området av integrering är triangeln som ges av olikheten $0 \le y \le x$. Efter bytet av ordning av integrering får vi integralen

$$\int_0^\infty dx \int_0^x e^{-x^2} \, dy = \int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$