

Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2009-05-20

1) Gradienten ges av

$$\text{grad } f = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$$

vilket ger $\text{grad } f(1, 1, 2) = (2, 3, 1)$. En enhetsvektor \mathbf{v} i riktningen $-\text{grad } f(1, 1, 2) = (2, 3, 1)$ ges av

$$\mathbf{v} = -\frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1).$$

Riktningensderivatan ges nu av

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1, 2) = \text{grad } f(1, 1, 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1)\right) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1) \cdot (2, 3, 1) = -\sqrt{14}.$$

Alternativt och enklare kan vi komma ihåg att minimala riktningensderivatan är $-|\text{grad } f|$ och fås i den riktning som ges av $-\text{grad } f$.

Svar: $-\sqrt{14}$.

2) De stationära punkterna ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0.$$

Andra ekvationen ger $y = -x/2$ vilket insatt i första ekvationen ger $3x^2 - x/2 = 0$, dvs. $x = 0$ eller $x = 1/6$. De stationära punkterna är alltså $(0, 0)$ och $(1/6, -1/12)$. Vi beräknar andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

I $(0, 0)$ får vi den kvadratiske formen

$$Q(h_1, h_2) = 2h_1h_2 + 2h_2^2 = 2\left(h_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}h_1^2,$$

som är indefinit. $(0, 0)$ är en sadelpunkt. I $(1/6, -1/12)$ får vi den kvadratiske formen

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 = \frac{1}{2}h_1^2 + 2\left(h_2 + \frac{1}{2}h_1\right)^2,$$

som är positivt definit. $(1/6, -1/12)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: $(0, 0)$ är en sadelpunkt och $(1/6, -1/12)$ är en lokal minimipunkt.

3) De övre och undre gränserna för z sammanfaller då $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8 - (x^2 + y^2)}$, vilket ger $x^2 + y^2 = 8 - (x^2 + y^2)$, dvs. $x^2 + y^2 = 4$. Kroppen K ges alltså av

$$K = \{(x, y, z); (x, y) \in E, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - (x^2 + y^2)}\},$$

där $E = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\}$. Volymen ges av

$$\text{vol}(K) = \iint_E \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-(x^2+y^2)}} 1 dz \right) dx dy = \iint_E (\sqrt{8-(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$$

I polära koordinater ges E av $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Övergång till polära koordinater ger

$$\text{vol}(K) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (\sqrt{8-r^2} - r) r dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(8-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$$

Svar: $\frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$

4) Vi vill minimera $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ under bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$. Lagranges multiplikatorer ger ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 4x^3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 4y^3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} &= 4z^3 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

(1)

Dessa ekvationer ger $x^3 = y^3 = z^3$ vilket ger $x = y = z$. Insatt i bivillkoret ger detta $3x = 6$, dvs. $x = 2$. Då x, y eller z går mot oändligheten går $x^4 + y^4 + z^4$ mot oändligheten, så $(2, 2, 2)$ måste ge minimum. Minsta värdet blir $3 \cdot 2^4 = 48$.

Svar: 48

5) a) Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0 = 2x \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} - 2x \frac{\partial z}{\partial u} - x \frac{\partial z}{\partial v} = -x \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Nu är $x = \sqrt{u-2y} = \sqrt{u-2v}$.

Svar: $-\sqrt{u-2v} \frac{\partial z}{\partial v}$

b) Räkningarna i a) ger $-x \frac{\partial z}{\partial v} = 0$ och eftersom $x > 0$ får vi $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, vilket ger $z = g(u)$ där g är en godtycklig C^1 funktion.

Svar: $z = g(x^2 + 2y)$ där g är en godtycklig C^1 funktion.

6) Området D ges av olikheterna $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$. Upprepad integration ger

$$\begin{aligned} \iint_D e^{y^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{2}(e - 1)$

7) Vi har $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ och $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x\}$. Derivering ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

och vi får

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq a$, $\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$. Övergång till polära koordinater ger

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_0^a r \sqrt{1 + 4r^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{12} \int_0^a 12r \sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{12} \left[(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{\pi}{12} ((1 + 4a^2)^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{12} ((1 + 4a^2)^{3/2} - 1)$

8) Vi vill beräkna integralen

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \frac{1}{a_0^3 \pi} e^{-\frac{2}{a_0} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0^3 \pi} \iiint_{D_R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\frac{2}{a_0} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz \end{aligned} \quad (2)$$

där

$$D_R = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

D_R är en uttömmande följd för \mathbb{R}^3 då $R \rightarrow \infty$. I rympolära koordinater ges D_R av $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Övergång till rympolära koordinater ger

$$\begin{aligned} &\iiint_{D_R} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\frac{2}{a_0} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^R r e^{-\frac{2}{a_0} r} r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^R r^3 e^{-\frac{2}{a_0} r} dr \right) = 4\pi \int_0^R r^3 e^{-\frac{2}{a_0} r} dr. \end{aligned}$$

I den sista integralen gör vi variabelbytet $s = 2r/a_0$, vilket ger integralen

$$4\pi \left(\frac{a_0}{2}\right)^4 \int_0^{2R/a_0} s^3 e^{-s} ds.$$

Gränsvärdet i (2) blir

$$\frac{1}{a_0^3 \pi} \cdot 4\pi \frac{a_0^4}{16} \int_0^\infty s^3 e^{-s} ds = \frac{1}{4} a_0 \cdot 3! = \frac{3}{2} a_0.$$

Svar: $\frac{3}{2} a_0$.

9) Låt $P(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ och $Q(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Vi ser att P och Q är C^1 överallt utom i origo. Dessutom är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - (x+y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - (x-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

dvs. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Låt C vara enhetscirkeln med positiv orientering. I området mellan γ och C är P och Q C^1 funktioner varför Greens formel ger

$$I = \int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy = \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$$

En parametrisering av C ges av $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Då är $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t)$ och definitionen av kurvintegralen längs C ger nu

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t - \sin t}{1} (-\sin t) + \frac{\cos t + \sin t}{1} \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Svar: 2π .