Lösningar till Tentamen i SF1646 Analys i flera variabler 2010-08-19

1) Vi bestämmer gradienten av f i origo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \cos(x-1), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1,$$

vilket ger $\operatorname{grad} f(1,0) = (1,1)$. Vi normerar vektorn $(4,3)$. Detta ger enhetsvektorn

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4,3) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}).$$

Riktningsderivatan ges nu av

$$f'_{\mathbf{v}}(1,0) = (1,1)\cdot(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{7}{5}.$$

Svar: $\frac{7}{5}$

2) Vi visar först att $(0,0)$ är en stationär punkt.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2} + y + 3x^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin y + x.$$

Insättning ger att $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, dvs. $(0,0)$ är en stationär punkt. Nu är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$

vilket ger den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 = 2[(h+k/2)^2 + 3k^2/4].$$

Vi ser att Q är positivt definit, vilket visar att $(0,0)$ är en lokal minimipunkt.

3) Vi byter till rymdpolära koordinater. K ges av $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/e$ och Jacobianen är $r^2 \sin\theta$. Detta ger

$$\iiint_K \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta}{(r^2)^2} \, d\phi \right) d\theta \right) dr$$
$$= 2\pi \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_1^2 \frac{dr}{r}^2 \right) = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Svar: π

4) Upprepad integartion ger

$$\iint_D \sqrt{x+y}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)^{1/2} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} \right]_0^x dx$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (2x)^{3/2} - x^{3/2} \, dx = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) \int_0^1 x^{3/2} \, dx = \frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1).$$

Svar: $\frac{4}{15}(2\sqrt{2}-1)$

5) Vi beräknar de partiella derivatorna av f i punkten $(1,-1)$ t.o.m. andra ordningen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y)e^x + \sin(x+y)e^x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y)e^x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y)e^x + 2\cos(x+y)e^x + \sin(x+y)e^x = 2\cos(x+y)e^x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y)e^x + \cos(x+y)e^x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x+y)e^x.$$

Detta ger

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = e(\cos 2 + \sin 2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e\cos 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2e\cos 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = e(\cos 2 - \sin 2). \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -e\sin 2.$$

Detta ger oss följande Taylorpolynom av andra ordningen kring $(1,1)$,

$$P(x,y) = e\sin 2 + e(\cos 2 + \sin 2)(x-1) + e\cos 2(y-1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[2e\cos 2(x-1)^2 + 2e(\cos 2 - \sin 2)(x-1)(y-1) - e\sin 2(y-1)^2\right]$$
$$= -\frac{3}{2}e\sin 2 + 2e(\sin 2 - \cos 2)x + (2e\sin 2)y + (e\cos 2)x^2 - \frac{1}{2}(\sin 2)y^2.$$

Svar: $-\frac{3}{2}e\sin 2 + 2e(\sin 2 - \cos 2)x + (2e\sin 2)y + (e\cos 2)x^2 - \frac{1}{2}(\sin 2)y^2$

6) Låt D beteckna ellipsen $x^2 + y^2/4 \leq 1$, så att $\gamma = \partial D$. Vi kan använda Greens formel. Denna ger

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x^2 - y)\,dx + (x + y^2)\,dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\,dxdy = 2\iint_D 1\,dxdy \\ &= 2\text{area}\,(D) = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 = 4\pi.\end{aligned}$$

Vi har här utnyttjat att ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ har arean πab.

(Problemet kan också lösas genom att parametrisera ellipsen genom $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.)

Svar: 4π

7) Låt D vara det område i xy-planet som es av $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Då ges K av

$$K = \{(x, y, z)\,;\,(x, y) \in D\,,\, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

Kroppens massa ges av

$$\begin{aligned}M &= \iiint_K \rho(x, y, z)\,dxdydz = c\iint_D \left(\int_0^{4-(x^2+y^2)} xyz\,dz\right) dxdy \\ &= c\iint_D xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{c}{2}\iint_D xy(4 - (x^2 + y^2))^2\,dxdy.\end{aligned}$$

I polära koordinater ges D av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Byte till polära koordinater ger

$$\begin{aligned}M &= \frac{c}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot (4 - r^2)^2\,dr\right) d\theta \\ &= \frac{c}{4}\left(\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2(4 - r^2)^2\,dr\right) = \frac{c}{4} \cdot 1 \cdot \frac{39}{10} = \frac{39}{40}c.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{39}{40}c$

8) En normal till ytan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 = c$ i punkten (x, y, z) ges av $\text{grad}\, f(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$, och en normal till ytan $g(x, y, z) = xy + z^2 = 2$ i samma punkt ges av $\text{grad}\, g(x, y, z) = (y, x, 2z)$. Om de båda ytornas tangentplan skall sammanfalla i denna punkt så måste dessa normaler vara paralella, dvs. det måste finnas en konstant $\lambda \neq 0$ så att

$$(2x, 2y, 4z) = \lambda(y, x, 2z).$$

Om $z \neq 0$ får vi från $4z = 2\lambda z$ att $\lambda = 2$, vilket ger $x = y$. Detta ger

$$c = x^2 + y^2 + 2z^2 = 2x^2 + 2z^2 = 2(xy + z^2) = 4.$$

Antag att $z = 0$. Om $x = 0$ är även $y = 0$ enligt vårt samband, vilket ej uppfyller att $xy + z^2 = 4$. Alltså ár $x \neq 0$. Vårt samband ger

$$2x = \lambda y = \frac{\lambda}{2} \cdot 2y = \frac{\lambda}{2} \cdot \lambda x,$$

vilket ger $\lambda^2 = 4$ eller $\lambda = \pm 2$. Om $\lambda = 2$ får vi $x = y$ och $c = 4$ som ovan. Om $\lambda = -2$ får vi $x = -y$, vilket tillsammans med $z = 0$ ger $2 = xy + z^2 = -x^2$ som är omöjligt. Vi har visat att $c = 4$ måste gälla.

Svar: $c = 4$

9) Låt $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

På samam sätt Får vi

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Nuär

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Vi ser att

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Alltså är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)=0,$$

ty f är harmonisk. Vidare är

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Vi ser att alla bidrag till högra ledet i (1) ger 0, dvs. g är harmonisk.