

SF1646 Analys i flera variabler
Tentamen 8 juni 2011, 08.00 - 13.00
Svar och lösningsförslag

- (1) a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z + xy^2z^3 = 10$ i punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. (3p)
- b) Punkten $(x, y, z) = (1.1, -0.9, t)$ ligger på ytan $z + xy^2z^3 = 10$. Bestäm med hjälp av det tangentplan som beräknats i a) ett approximativt värde på t . (1p)

Lösning: a) Låt $f(x, y, z) = z + xy^2z^3$. Ytan är då nivåytan $f(x, y, z) = 10$. Eftersom $f(1, -1, 2) = 10$ ligger punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ verkligen på ytan. Vi bestämmer de partiella derivatorna av f i $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

$$\begin{aligned}f'_x(x, y, z) &= y^2z^3 && \implies f'_x(1, -1, 2) = 8 \\f'_y(x, y, z) &= 2xyz^3 && \implies f'_y(1, -1, 2) = -16 \\f'_z(x, y, z) &= 1 + 3xy^2z^2 && \implies f'_z(1, -1, 2) = 13\end{aligned}$$

Det sökta tangentplanet har alltså ekvation

$$8(x - 1) - 16(y + 1) + 13(z - 2) = 0 \iff 8x - 16y + 13z = 50.$$

b) Ett approximativt värde till t fås genom att bestämma det tal s som är sådant att $(x, y, z) = (1.1, -0.9, s)$ uppfyller tangentplanetns ekvation.

$$8(1.1 - 1) - 16(-0.9 + 1) + 13(s - 2) = 0 \iff s = 2 + \frac{4}{65} \approx 2.1$$

Svar: a) $8x - 16y + 13z = 50$ b) $t \approx 2 + \frac{4}{65} \approx 2.1$.

- (2) Beräkna volymen mellan ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och det område i xy -planet som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y > 0$ och $y \geq 0$.

Lösning: Låt K vara den kropp vars volym skall beräknas och låt D vara området i xy -planet som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y > 0$ och $y \geq 0$. Området D ges i polära koordinater av $r \leq 1$ och $0 \leq \phi \leq 3\pi/4$. Volymen $Vol(K)$ ges då av

$$\begin{aligned}Vol(K) &= \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} - 0 \, dx dy = \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq 3\pi/4} \sqrt{1 - r^2} r dr d\phi \\&= \int_0^{3\pi/4} d\phi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{2}{3 \cdot (-2)} (1 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{4}$ v.e.

- (3) Låt $f(x, y) = x^3y^4$. Beräkna riktningsderivatorna

- $f'_u(1, 1)$ då \mathbf{u} är en enhetsvektor som är tangetvektor till kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1, 1)$;
- $f'_v(1, 1)$ då \mathbf{v} är en enhetsvektor som har positiv x -komponent och är ortogonal mot kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1, 1)$.

Lösning: Lösningen bygger på det kända faktumet att grad $f(a, b)$ är ortogonal mot f :s nivåkurva genom punkten (a, b) .

Eftersom \mathbf{u} är parallell med med kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1, 1)$ är \mathbf{u} ortogonal mot grad $f(1, 1)$. Vi får

$$f'_u(1, 1) = \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(1, 1) = 0$$

eftersom skalärprodukten av två sinsemellan ortogonal vektorer är $= 0$.

\mathbf{v} är en enhetsvektor parallell med grad $f(1, 1)$. Vi har att

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2y^4, 4x^3y^3) \implies \text{grad } f(1, 1) = (3, 4),$$

och alltså är \mathbf{v} , som också ska positiv x -komponent, $= \frac{1}{5}(3, 4)$. Vi får

$$f'_v(1, 1) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } f(1, 1) = \frac{1}{5}(3, 4) \cdot (3, 4) = 5$$

Svar: a) 0 b) 5 .

- (4) De reellvärda funktionerna av två variabler f_1, f_2, f_3, f_4 har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar i hela \mathbb{R}^2 och har Taylorpolynom av grad 2 i origo enligt nedan:

f_1 har andra gradens Taylorpolynom $p_1(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x + y$ i origo.

f_2 har andra gradens Taylorpolynom $p_2(x, y) = 47 - 5x^2 + 3xy - y^2$ i origo.

f_3 har andra gradens Taylorpolynom $p_3(x, y) = x^2 + 10xy + 2y^2$ i origo.

f_4 har andra gradens Taylorpolynom $p_4(x, y) = 4x^2 - 3y^2$ i origo.

Avgör om någon eller några av funktionerna f_1, f_2, f_3, f_4 har en lokal extrempunkt i origo. Avgör i så fall också om möjligt vilken typ av extrempunkt det är.

Lösning: Eftersom funktionen f_1 har partiella derivator i origo som båda är 1 ($\neq 0$) så har f_1 ingen lokal extrempunkt i origo.

För funktionen f_2 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiske formen $-5x^2 + 3xy - y^2 = -5(x^2 - (3/5)xy + (1/5)y^2) = -5[(x - (3/10)y)^2 + (11/100)y^2]$ som tydligen är negativt definit. Alltså har f_2 en lokal maxpunkt i origo.

För funktionen f_3 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiske formen $x^2 + 10xy + 2y^2 = [(x + 5y)^2 - 23y^2]$ som tydligen är indefinit. Alltså har f_3 en sadelpunkt och ingen lokal extrempunkt i origo.

För funktionen f_4 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiske formen $4x^2 - 3y^2$ som är indefinit. Alltså har f_4 en sadelpunkt och ingen lokal extrempunkt i origo.

Svar: Den enda av funktionerna som har en lokal extrempunkt i origo är f_2 som har en lokal maxpunkt där.

- (5) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K x \, dx \, dy \, dz$ då K är den tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet $2x + 3y + 6z = 6$.

Lösning: Tetraedern har sina hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Den sida av tetraedern som ligger i xy -planet är en triangel begränsad av x - och y -axlarna samt linjen $2x + 3y = 6$ dvs $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Det följer att

$$\begin{aligned} \iiint_K x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y} x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} x \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) dy \, dx = \int_0^3 x \left[\left(1 - \frac{1}{3}x\right)y - \frac{y^2}{4}\right]_0^{2(1-\frac{1}{3}x)} dx \\ &= \int_0^3 x \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2 dx = \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x \, dx = \dots = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{3}{4}$

- (6) En partikel rör sig längs den kurvan $xy^2 = 1$ från $(1, 1)$ till $(1/4, 2)$ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\mathbf{F}(x, y) = (-xy, x^2y^2)$. Beräkna det arbete som kraftfältet uträttar.

Lösning: Kurvan γ kan parametreras genom $(x, y) = \mathbf{r}(t) = (1/t^2, t)$, $t \in (1, 2)$. Vi har att $\mathbf{r}'(t) = (-2/t^3, 1)$. Arbetet ges av

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

enligt definitionen av kurvintegralen. Eftersom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{t^3}, 1\right) = \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2}$$

så blir arbetet

$$\int_1^2 \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2} \, dt = \left[-\frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{13}{12}.$$

Svar: $\frac{13}{12}$.

- (7) För ett visst svängande trumskinn, givet av $x^2 + y^2 \leq R^2$, gäller att svängningsamplituden $u(x, y)$ uppfyller Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u = 0$$

där c är en konstant. Av symmetriskäl kan man förvänta sig lösningar av formen $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, för någon funktion f av en variabel. Visa att en sådan lösning f måste uppfylla differentialekvationen

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + c^2 f(r) = 0.$$

Lösning: Vi bestämmer först $\frac{\partial u}{\partial x}$ i termer f och dess derivata.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vi bestämmer på motsvarande sätt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2}{r^3}, \end{aligned}$$

där vi har infört beteckningen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

På grund av symmetri i x och y fås också

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{x^2}{r^3}.$$

Insättning i Helmholtz ekvation ger

$$\begin{aligned} f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2}{r^3} + f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2}{r^3} + c^2 f(r) &= 0 \iff \\ f''(r)\frac{x^2 + y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2 + y^2}{r^3} + c^2 f(r) &= 0 \iff \\ f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + c^2 f(r) &= 0 \quad \text{V.S.B} \end{aligned}$$

- (8) Beräkna trippelintegralen $\iiint_B \cos z + \sin z \, dx dy dz$ då B är det område som bestäms av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Lösning: Området B består av den del av klotet med medelpunkt i origo och radie 2 som ligger över, i och under första kvadranten i xy -planet. Eftersom B är symmetriskt med avseende på planet $z = 0$ och $\sin z$ är en udda funktion i z följer att $\iiint_B \sin z \, dx dy dz = 0$. För att beräkna $\iiint_B \cos z \, dx dy dz$ beskriver vi B i sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad S : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \iiint_B \cos z + \sin z \, dx dy dz &= \iiint_B \cos z \, dx dy dz = \iiint_S \cos(r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 \left(\int_0^\pi r^2 \cos(r \cos \theta) \sin \theta d\theta \right) dr \end{aligned}$$

Den inre θ -integralen beräknar vi med substitutionen $u = r \cos \theta$ (r hålls här konstant), $du = -r \sin \theta$, och med nya gränser $u(0) = r$ och $u(\pi) = -r$. Minustecknet i du försvinner genom omkastning av integrationsgränserna. Vi får

$$\int_0^\pi r^2 \cos(r \cos \theta) \sin \theta d\theta = r \int_{-r}^r \cos u du = 2r \sin r$$

vilket ger

$$\iiint_B \cos z + \sin z \, dx dy dz = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^2 r \sin r dr = \pi [\sin r - r \cos r]_0^2 = \pi(\sin 2 - 2 \cos 2).$$

Svar: $\pi(\sin 2 - 2 \cos 2)$

- (9) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner sådana att $f \leq g$, $f(a) = g(a)$ och $f(b) = g(b)$, och låt $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion med kontinuerliga partiella derivator. Visa, utan att använda Greens formel, att

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ och γ är randen ∂D orienterad moturs.

(Påståendet i uppgift 9 är ett specialfall av Greens formel och kan användas som ett steg i ett bevis av den generella formuleringen av Greens formel.)

Lösning: Låt γ_1 vara kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, där vi tar x som kurvparameter löpande från a till b , och låt γ_2 vara kurvan $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, där vi återigen tar x som kurvparameter men nu löpande från b till a . Då är $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ och

$$\begin{aligned} V.L. &= \int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_{\gamma_1} P(x, y) dx + \int_{\gamma_2} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, f(x)) dx + \int_b^a P(x, g(x)) dx = \int_a^b (P(x, f(x)) - P(x, g(x))) dx. \end{aligned}$$

Vi jobbar nu med högerledet, och utnyttjar att $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$

$$H.L. = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = - \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx = V.L.$$
