SF1646 Analys i flera variabler
Tentamen 18 augusti 2011, 14.00 - 19.00
Svar och lösningsförslag

(1) Låt $f(x, y) = xy - \ln(x + y^2)$.

I vilken riktning är riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ som störst, och hur stor är riktningsderivatan i denna riktning?

Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ är lika med noll? Ange i sådana fall denna/dessa riktningar.

Lösning (1). Riktningsderivatan av en funktion f i en punkt P är störst i gradienten grad $f(P)$:s riktning, och detta största värde ges av normen $|\text{grad}\, f(P)|$. Riktningsderivatan är noll i rikting längs tangentlinjen till f:s nivåkurva genom punkten P, dvs ortogonalt mot grad $f(P)$. Vi har att

$$\text{grad}\, f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - \frac{1}{x + y^2}, x - \frac{2y}{x + y^2}\right)$$

så alltså är

$$\text{grad}\, f(1, 2) = \left(2 - \frac{1}{5}, 1 - \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad \text{och} \quad |\text{grad}\, f(1, 2)| = \frac{1}{5}\sqrt{82}.$$

Riktningar vinkelrätt mot gradienten ges av $\pm(-1, 9)$.

Svar (1): Maximal riktningsderivata av f i punkten $(1, 2)$ är $\frac{1}{5}\sqrt{82}$ och fås i riktning $(9, 1)$. Riktningsderivatan av f i $(1, 2)$ är noll i riktningarna $\pm(-1, 9)$.

---

(2) Låt D vara området i planet givet av olikheterna $0 \le y \le 1 - x^2$. Beräkna integralen

$$\iint_D y \, dxdy.$$

Lösning (2). Av olikheten $1 - x^2 \ge 0$ följer att $-1 \le x \le 1$. Området ges alltså av all (x, y) sådana att $-1 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1 - x^2$. Vi beräknar integralen medelst upprepad integration.

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \, dx = \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Svar (2): $\frac{8}{15}$.

---

(3) Visa först att funktionen $f(x,y) = e^{x^2} - 2\cos y + xy + x^3$ har en stationär punkt i origo. Bestäm sedan den stationära punktens karaktär (dvs avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt).

Lösning (3). $f(x,y) = e^{x^2} - 2\cos y + xy + x^3$ så $f(0,0) = -1$. Vi beräknarförstaderivatorna

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2xe^{x^2} + y + 3x^2 &&\Longrightarrow f'_x(0,0) = 0, \\ f'_y(x,y) &= 2\sin y + x &&\Longrightarrow f'_y(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ är origo en stationär punkt per definition. Vi beräkar vidare andraderivatorna

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 6x &&\Longrightarrow f''_{xx}(0,0) = 2, \\ f''_{xy}(x,y) &= 1 &&\Longrightarrow f''_{xy}(0,0) = 1, \\ f''_{yy}(y,y) &= 2\cos y &&\Longrightarrow f''_{yy}(0,0) = 2. \end{aligned}$$

Det följer att andra ordningens Taylorpolynom P i origo ges av

$$\begin{aligned} P(x,y) &= f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy + 2y^2\right) = -1 + x^2 + xy + y^2 = -1 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2. \end{aligned}$$

Det följer att origo är ett lokalt minimum eftersom andragradstermen är positivt definit.

Svar (3): Då $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ är origo en stationär punkt, och andra ordningens Taylorutveckling visar också att det är ett lokalt minimum.

---

(4) För en viss mängd gas gäller att $p = p(T,V) = \dfrac{8T}{V}$, där p betecknar tryck [kPa], T temperatur [K] och V volym [m^3]. Använd linjär approximation för att beskriva hur trycket förändras för små variationer i temperatur och volym kring värdena $T = 300$ och $V = 2$.

Ange speciellt med hjälp av denna approximation ett ungefärligt värde på tryckförändringen som uppstår då tempertaturen ökar med 2 grader samtidigt som volymen ökar med 5 liter (dvs $5 \cdot 10^{-3}$ m^3).

Lösning (4). Den sökta linjära approximationen ges av

$$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx \frac{\partial P}{\partial T}(300,2)h + \frac{\partial P}{\partial V}(300,2)k.$$

Vi har att $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}$ så $\frac{\partial P}{\partial T}(300,2) = 4$, och $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{8T}{V^2}$ så $\frac{\partial P}{\partial V}(300,2) = -600$. Alltså är

$$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx 4h - 600k.$$

Speciellt fås med $h = 2$ och $k = 5 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta P(2, 5 \cdot 10^{-3}) \approx 4 \cdot 2 - 600 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 8 - 3 = 5.$$

Svar (4):$\Delta P(h,k) = P(300+h, 2+k) - P(300,2) \approx 4h - 600k$ [kPa]. Speciellt är $\Delta P(2, 5\cdot 10^{-3}) \approx 5$[kPa] .

---

(5) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z\,dxdydz$$

där K är den kropp som begränsas av planet $z = 3$ och konen $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Lösning (5). Integrationsområdet K är en solid rät cirkulär kon med basytan i planet $z = 3$ och spets på z-axeln i punkten $(0,0,4)$. Där planet $z = 3$ och konen $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ skär varandra gäller att $3 = 4 - \sqrt{x^2+y^2} \iff x^2 + y^2 = 1$, dvs integrationsområdets projektion på xy-planet är cirkelskivan $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.Vi får

$$\iiint_K z\,dxdydz = \iint_D \int_3^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,dxdy = \iint_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_3^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left(4 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 3^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(7 - 8\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2\right) dxdy$$

$\{$Vi byter till polära koordinater$\}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (7 - 8r + r^2) r\,dr\,dv = \frac{13}{12}\pi$$

Svar (5): $\frac{13}{12}\pi$

---

(6) a) Transformera uttrycket

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

till polära koordinater. (2p)

b) Lös den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

med randvillkoret $f(x,0) = x^2$. (1p)

Lösning (6). a) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Nu är $r = \sqrt{x^2+y^2}$ och $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, vilket ger

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

Detta ger

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\partial\frac{x}{r^2}\right) - y\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\partial\frac{-y}{r^2}\right)$$
$$= \frac{x^2+y^2}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Alternativt kan vi bara notera att

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

b) Det följer från a) att den givna ekvationen är ekvivalent med $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$, vilket ger $f(r,\theta) = g(r)$ för någon differentierbar funktion g. Detta ger i de ursprungliga variablerna $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$. Randvillkoret $f(x,0) = g(\sqrt{x^2}) = x^2$ ger då att $g(r) = r^2$. Alltså är $f(x,y) = x^2+y^2$.

Svar (6): a) $\frac{\partial f}{\partial \theta}$; b) $f(x,y) = x^2+y^2$.

---

(7) Vektorfältet $\mathbf{F} = (P,Q)$ är definierat i hela planet $\mathbb{R}^2$, förutom i origo, av

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ då γ_1 är en cirkel med radie 1, medelpunkt i $(2,0)$ och orienterad moturs. (2 p)

b) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ då γ_2 är en cirkel med radie 1, medelpunkt i origo och orienterad moturs. (2 p)

Lösning (7). a) Fältet $\mathbf{F} = (P,Q)$ är definierat och kontinuerligt deriverbart i ett område innehållande den cirkelskiva C_1 som begränsas av γ_1 (origo ligger ej innanför γ_1). Vi kan använda Greens formel och får

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{C_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = 0$$

eftersom $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

b) Eftersom γ_2 är randen till ett område som innehåller origo där fältet inte är definierat kan vi inte använda Greens formel. Vi parameteriserar γ_2 med $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ vilket ger $(dx/dt, dy/dt) = (-\sin t, \cos t)$. Vi får, eftersom $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ på γ_2, att

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{cos^2 t + \sin^2 t}\right)\cdot(-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t\, dt = 2\pi$$

Svar (7): a) $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 0$ och b) $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = 2\pi$

---

(8) Beräkna volymen av den parallellepiped som ges av olikheterna

$$\begin{cases} -1 \le -x + y - z \le 1 \\ -1 \le x + 2y + 3z \le 1 \\ -1 \le x + y + z \le 1 \end{cases} .$$

Lösning (8). Låt P vara den angivna parallellepipeden. Inför nya koordinater $(u, v, w) = T(x, y, z)$ genom

$$T : \begin{cases} u = -x + y - z \\ v = x + 2y + 3z \\ w = x + y + z \end{cases} .$$

Låt $Q = T(P)$, som blir ett rätblock i (u, v, w)-rummet, $-1 \le u, v, w \le 1$.

$$\text{Volymen}(P) = \iiint_P dxdydz = \{\text{variabelbyte}\} = \iiint_Q \left|\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}\right| dudvdw.$$

Mellan Jacobideterminanterna för T och och den inversa avbildningen T^{-1} råder sambandet

$$\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}}.$$

Vi beräknar $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = 4$. Alltså

$$\text{Volymen}(P) = \iiint_Q \left|\frac{1}{4}\right| dudvdw = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} du\, dv\, dw = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{4} = 2$$

Svar (8): 2 volymsenheter

---

(9) Undersök om funktionen

$$f(x,y) = \frac{1+3x^2-x^2y^2}{1+x^2}$$

antar något största respektive minsta värde på det oändliga bandet $\{(x,y) : -\infty < x < \infty, -1 \le y \le 1\}$.
Ange i förekommande fall största respektive minsta värde och i vilka punkter dessa antas.

Lösning (9). Vi konstaterar först att $f(0,y) = 1$ för alla $-1 \le y \le 1$, och att om $x \neq 0$ är $f(x,y) > 1$ ty

$$f(x,y) = \frac{1+3x^2-x^2y^2}{1+x^2} = 1 + (2-y^2)\frac{x^2}{1+x^2} > 1 \quad x \neq 0, |y| < 1.$$

Alltså är $f(0,y) = 1$ minsta värde.

Vi har också att

$$f(x,y) = 1 + (2-y^2)\frac{x^2}{1+x^2} \le 1 + 2\frac{x^2}{1+x^2} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) < 3.$$

Eftersom också

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+3x^2}{1+x^2} = 3$$

gäller att f antar värden godtyckligt nära 3 men är < 3 på hela området — största värde saknas alltså.

Svar (9): Funktionen f har ett minsta värde 1 på bandet, som antas i alla punkter $(0,y)$ på x-axeln, $-1 \le y \le 1$, dvs $f_{\min} = f(0,y) = 1$. Funktionen saknar största värde på bandet.