KTH Matematik
Kurt Johansson, Avd. Matematik

TENTAMEN SF1646
Analys i flera variabler, 6 hp
Torsdagen 18/8 2011 kl. 14-19

Hjälpmedel: Inga.
Instruktioner: Tentamen består av 9 uppgifter. Maximal poäng på varje uppgift är 3 poäng. För poäng krävs väl motiverade lösningar. Endast svar ger 0 p. 12 poäng ger säkert betyg E.

1. a) Låt $f(x, y) = xy - \ln(x + y^2)$.

   I vilken riktning är riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ som störst, och hur stor är riktningsderivatan i denna riktning? (2p)

   b) Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ är lika med noll? Ange i sådana fall denna/dessa riktningar. Låt $f(x, y) = xy - \ln(x + y^2)$. (1p)

2. Låt D vara området i planet givet av olikheterna $0 \leq y \leq 1 - x^2$. Beräkna integralen
$$\iint_D y \, dxdy.$$
(3p)

3. Visa först att funktionen $f(x, y) = e^{x^2} - 2\cos y + xy + x^3$ har en stationär punkt i origo. Bestäm sedan den stationära punktens karaktär (dvs avgör om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt). (3p)

4. a) För en viss mängd gas gäller att $p = p(T, V) = \dfrac{8T}{V}$, där p betecknar tryck [kPa], T temperatur [K] och V volym [m^3]. Använd linjär approximation för att beskriva hur trycket förändras för små variationer i temperatur och volym kring värdena $T = 300$ och $V = 2$. (2p)

   b) Ange speciellt med hjälp av denna approximation ett ungefärligt värde på tryckförändringen som uppstår då tempertaturen ökar med 2 grader samtidigt som volymen ökar med 5 liter (dvs $5 \cdot 10^{-3}$ m^3). (1p)

5. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K z \, dxdydz$$
där K är den kropp som begränsas av planet $z = 3$ och konen $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. a) Transformera uttrycket

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

till polära koordinater. (2p)

b) Lös den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

med randvillkoret $f(x, 0) = x^2$. (1p)

7. Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är definierat i hela planet $\mathbb{R}^2$, förutom i origo, av

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

a) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då γ_1 är en cirkel med radie 1, medelpunkt i $(2, 0)$ och orienterad moturs. (2 p)

b) Bestäm kurvintegralen $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då γ_2 är en cirkel med radie 1, medelpunkt i origo och orienterad moturs. (1 p)

8. Beräkna volymen av den parallellepiped som ges av olikheterna

$$\begin{cases} -1 \leq -x + y - z \leq 1 \\ -1 \leq x + 2y + 3z \leq 1 \\ -1 \leq x + y + z \leq 1 \end{cases} .$$

(3 p)

9. Undersök om funktionen

$$f(x, y) = \frac{1 + 3x^2 - x^2y^2}{1 + x^2}$$

antar något största respektive minsta värde på det oändliga bandet $\{(x, y) : -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1\}$.

Ange i förekommande fall största respektive minsta värde och i vilka punkter dessa antas. (3 p)

LYCKA TILL!