KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen plus lösning i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL 2009–12–17, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Vektorfältet
$$\boldsymbol{F} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$
är väldefinierat utanför z-axeln. Låt C vara cirkeln $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = R^2,\ z = z_0\}$, där z_0 och $R > 0$ är konstanter. Beräkna linjeintegralen
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där C genomlöps ett varv i positiv led runt z-axeln. (3p)

Lösning: C parametriseras genom $\boldsymbol{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, z_0)$, där $\theta \colon 0 \to 2\pi$, och då blir
$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \frac{(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)}{R^2} \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = d\theta,\end{aligned}$$
varför
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{v} = (\sin(yz), \cos(xz), z^2)$ genom struten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 1\}$, där S är orienterad med en utåtriktad normal. (3p)

Lösning: Låt L vara locket $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = 1\}$ till struten. Då är $S+L$ begränsningsytan av käglan $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$. Divergenssatsen säger då att

$$\iint_{S+L} \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV,$$

så att

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dV - \iint_L \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS.$$

Eftersom $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 + 0 + 2z = 2z$ är

$$\begin{aligned}
\iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2z\, dz \right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(1 - (x^2 + y^2)\right) dxdy = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 - r^2) r\, drd\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

På L är $\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = (0, 0, 1)\, dxdy$ och $\boldsymbol{v} = (\sin y, \cos x, 1)$, så att

$$\iint_L \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_L dxdy = L\text{:s area } = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$

Därmed blir

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Beräkna samtliga nollställen till den komplexa funktionen $w = \cos z$, där $z = x + iy$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
&0 = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1 \\
&\iff 2iz = \log(-1) = \ln 1 + i \cdot (\pi + n \cdot 2\pi) = i \cdot (\pi + 2n \cdot \pi) \\
&\implies z = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}$$

4. Härled formeln

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \operatorname{div} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$

Ledning: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (3p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
[\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})]_i &= [\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})]_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{klm}F_l G_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\left(\frac{\partial F_l}{\partial x_j}G_m + F_l\frac{\partial G_m}{\partial x_j}\right) \\
&= \frac{\partial F_i}{\partial x_j}G_j - \frac{\partial F_j}{\partial x_j}G_i + F_i\frac{\partial G_j}{\partial x_j} - F_j\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \\
&= \left(G_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)F_i - \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,G_i + F_i\operatorname{div}\boldsymbol{G} - \left(F_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)G_i \\
&= (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)F_i - G_i\operatorname{div}\boldsymbol{F} + F_i\operatorname{div}\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)G_i \\
&= [(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\operatorname{div}\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}]_i.
\end{aligned}
$$

5. Låt C vara den positivt orienterade randkurvan till en yta S med enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$. Visa att

$$\oint_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = 2\iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\,dS,$$

där $\boldsymbol{r}$ = ortsvektorn = (x_1, x_2, x_3).

Ledning: Räcker att visa att i:te komponenterna är lika för $i = 1, 2, 3$:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\oint_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{e}_i\cdot\iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\,dS.$$

Observera också att $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$. (4p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i\cdot\oint_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} &= \oint_C (\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \{\text{enligt Stokes}\} \\
&= \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r})\times\hat{\boldsymbol{n}}\,dS.
\end{aligned}
$$

Här är

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (0, -x_3, x_2),$$

och

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & -x_3 & x_2 \end{vmatrix} = (2, 0, 0) = 2\boldsymbol{e}_1;$$

analogt fås

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3, 0, -x_1),$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ x_3 & 0 & -x_1 \end{vmatrix} = (0, 2, 0) = 2\boldsymbol{e}_2,$$

och $\operatorname{rot}(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{e}_3$. Alltså är

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \oint_C \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 2\boldsymbol{e}_i \cdot \iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\, dS.$$

6. Låt ρ, ϕ, z vara cylinderkoordinater och låt $\Delta = \nabla^2$ vara Laplaceoperatorn. Avgör för vilka heltal n som

$$\Delta(\rho^n\, \boldsymbol{e}_\rho) = \boldsymbol{0} \quad \text{då} \quad \rho > 0.$$

Ledning: $\Delta \boldsymbol{F} =$ grad div $\boldsymbol{F} -$ rot rot $\boldsymbol{F}$. (3p)

Lösning:

$$\operatorname{div}(\rho^n \boldsymbol{e}_\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \cdot \rho^n) = (n+1)\,\rho^{n-1} \Longrightarrow$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}(\rho^n \boldsymbol{e}_\rho) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left((n+1)\rho^{n-1}\right)\boldsymbol{e}_\rho = (n+1)(n-1)\,\rho^{n-2}\boldsymbol{e}_\rho,$$

och

$$\operatorname{rot}(\rho^n \boldsymbol{e}_\rho) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\,\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ \rho^n & \rho \cdot 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0},$$

varför

$$\Delta(\rho^n \boldsymbol{e}_\rho) = (n+1)(n-1)\,\rho^{n-2}\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{0} \iff n = \pm 1.$$

7. (a) Låt D vara enhetsskivan uppslitsad längs negativa reella axeln, det vill säga $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1, -\pi < \arg z < \pi\}$. Bestäm en konform avbildning av D på första kvadranten $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 0\}$ i w-planet. (2p)

Lösning: Argumentintervallet $-\pi < \arg z < \pi$ halveras genom $w_1 = z^{1/2}$, vilket ger $|w_1| < 1$ och $-\pi/2 < \arg w_1 < \pi/2$, det vill säga högra halvan av enhetsskivan. Skicka sedan $w_1 = i$ till $w_2 = 0$ och $w_1 = -i$ till $w_2 = \infty$ genom Möbiusfunktionen

$$w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i} = \frac{z^{1/2} - i}{z^{1/2} + 1}.$$

Man ser att $w_1 = 0 \Longrightarrow w_2 = -1$; detta plus vinkelbevarande (eller kolla flera punkter) visar att bilden i w_2-planet blir den tredje kvadranten. Den första fås genom att vrida vinkeln π:

$$w = u + iv = e^{i\pi} w_2 = -w_2 = \frac{i - z^{1/2}}{i + z^{1/2}},$$

så att

$$u = \operatorname{Re}\left(\frac{i - z^{1/2}}{i + z^{1/2}}\right), \quad v = \operatorname{Im}\left(\frac{i - z^{1/2}}{i + z^{1/2}}\right).$$

(b) Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{i D,} \\ \phi = 1 & \text{på cirkelperiferin } \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1, -\pi < \arg z < \pi\}, \\ \phi = 0 & \text{på ovan- och undersidan av slitsen, det vill säga på} \\ & \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1, \arg z = \pi\}, \text{ respektive } \{z \in \mathbb{C} \colon \\ & |z| < 1, \arg z = -\pi\}. \end{cases}$$

I svaret behöver man *inte* uttrycka $\operatorname{Re} w$ och $\operatorname{Im} w$ med hjälp av $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$. (1p)

Lösning: I w-planet fås Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ då } u, v > 0, \\ \phi = 0 \text{ då } v = 0, u > 0, \\ \phi = 1 \text{ då } u = 0, v > 0, \end{cases}$$

med den uppenbara lösningen

$$\phi(u, v) = \frac{2}{\pi} \arg w = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v}{u}.$$

Så svaret blir

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v(x, y)}{u(x, y)}.$$

8. (a) Bestäm potentialen mellan cylindrarna $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < R_1\}$ och $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < R_2\}$, där $R_1 < R_2$, om potentialen på den inre cylindern är konstant lika med ϕ_1 och på den yttre är konstant lika med ϕ_2. (2p)

Lösning: $\log z = \ln|z| + i \arg z$ deriverbar då $z \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} \log z = \ln|z| = 1/2\, \ln(x^2 + y^2)$ är harmonisk då $(x, y) \neq (0, 0)$. Så vi gör ansatsen $\phi = a\, \ln(x^2 + y^2) + b$, och får

$$\begin{cases} \phi_1 = a \cdot 2 \ln R_1 + b & (1) \\ \phi_2 = a \cdot 2 \ln R_2 + b & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \Longrightarrow \phi_2-\phi_1 = a\cdot 2\ln(R_2/R_1) \Longrightarrow a = \frac{\phi_2-\phi_1}{2\ln(R_2/R_1)},$$
$$\ln R_2\cdot(1)-\ln R_1\cdot(2) \Longrightarrow \phi_1\,\ln R_2-\phi_2\,\ln R_1 = b\,(\ln R_2-\ln R_1)$$
$$\Longrightarrow b = \frac{\phi_1\,\ln R_2-\phi_2\,\ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Alltså blir

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_2-\phi_1}{2\ln(R_2/R_1)}\cdot\ln(x^2+y^2)+\frac{\phi_1\ln R_2-\phi_2\ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}.$$

(b) Motsvarande problem då den inre cylindern ges av $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon (x-1)^2+y^2=1\}$ (där potentialen $=\phi_1$) och den större ges av $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=9\}$ (där potentialen $=\phi_2$) kan återföras på problemet i (a) genom att man avbildar området mellan cirklarna $\{(x-1)^2+y^2=1\}$ och $\{x^2+y^2=9\}$ konformt på området mellan två cirklar med medelpunkt i origo. Härled en sådan avbildning samt bestäm radierna för bildcirklarna. (2p)

Lösning: Vi använder en Möbiusfunktion $w=m(z)$ för att avbilda cirklar på cirklar. Eftersom de koncentriska bildcirklarna har 0 och ∞ som *gemensamma* spegelpunkter, så måste urprungscirklarna ha de *gemensamma* spegelpunkterna $m^{-1}(0)$ och $m^{-1}(\infty)$. Villkoret för att dessa ska ligga på samma förlängda radier från respektive medelpunkter är att de ligger på positiva reella axeln och alltså ges av $(a,0$ och $(b,0)$, där a, b satisfierar

$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=1^2,\\ a\,b=3^2\end{cases}$$

Första ekvationen visar att $ab-(a+b)+1=1 \iff a+b=ab$, som alltså är lika med 9, så att $b=9-a$; insatt i den andra fås

$$a(9-a)=9 \iff a^2-9a+9=0 \iff a=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81-36}{4}}$$
$$=\frac{9\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

Det vill säga

$$a=\frac{9-3\sqrt{5}}{2} \quad \text{och} \quad b=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}.$$

Vi väljer en Möbius som skickar a till 0 och b till ∞:

$$w=\frac{z-a}{z-b}.$$

Då kommer bildcirklarna att ha 0 och ∞ som spegelpunkter, och måste därför ha origo som gemensam medelpunkt. För att ta reda på bildcirklarnas radier sätter vi in lämpliga randpunkter:

$$\begin{aligned} z = 0 &\Longrightarrow w = \frac{a}{b} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, \\ z = 3 &\Longrightarrow w = \frac{6-(9-3\sqrt{5})}{6-(9+3\sqrt{5})} = \frac{-1+\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}. \end{aligned}$$

Så den inre radien är lika med $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ och den yttre är $= \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.