KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL 2009–12–17, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Vektorfältet
$$\boldsymbol{F} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$
är väldefinierat utanför z-axeln. Låt C vara cirkeln $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = R^2,\ z = z_0\}$, där z_0 och $R > 0$ är konstanter. Beräkna linjeintegralen
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där C genomlöps ett varv i positiv led runt z-axeln. (3p)

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{v} = (\sin(yz), \cos(xz), z^2)$ genom struten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$, där S är orienterad med en utåtriktad normal. (3p)

3. Beräkna samtliga nollställen till den komplexa funktionen $w = \cos z$, där $z = x + iy$. (3p)

4. Härled formeln
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \operatorname{div} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$
Ledning: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (3p)

5. Låt C vara den positivt orienterade randkurvan till en yta S med enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$. Visa att

$$\oint_C \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = 2 \iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\, dS,$$

där $\boldsymbol{r}$ = ortsvektorn $= (x_1, x_2, x_3)$.

Ledning: Räcker att visa att i:te komponenterna är lika för $i = 1, 2, 3$:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \oint_C \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{e}_i \cdot \iint_S \hat{\boldsymbol{n}}\, dS.$$

Observera också att $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$. (4p)

6. Låt ρ, ϕ, z vara cylinderkoordinater och låt $\Delta = \nabla^2$ vara Laplaceoperatorn. Avgör för vilka heltal n som

$$\Delta(\rho^n\, \boldsymbol{e}_\rho) = \boldsymbol{0} \quad \text{då} \quad \rho > 0.$$

Ledning: $\Delta \boldsymbol{F} =$ grad div $\boldsymbol{F}$ − rot rot $\boldsymbol{F}$. (3p)

7. (a) Låt D vara enhetsskivan uppslitsad längs negativa reella axeln, det vill säga $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1, -\pi < \arg z < \pi\}$. Bestäm en konform avbildning av D på första kvadranten $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 0\}$ i w-planet. (2p)

   (b) Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{i D,} \\ \phi = 1 & \text{på cirkelperiferin } \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1, -\pi < \arg z < \pi\}, \\ \phi = 0 & \text{på ovan- och undersidan av slitsen, det vill säga på} \\ & \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1, \arg z = \pi\}, \text{ respektive } \{z \in \mathbb{C} \colon \\ & |z| < 1, \arg z = -\pi\}. \end{cases}$$

   I svaret behöver man *inte* uttrycka $\operatorname{Re} w$ och $\operatorname{Im} w$ med hjälp av $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$. (1p)

8. (a) Bestäm potentialen mellan cylindrarna $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < R_1\}$ och $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < R_2\}$, där $R_1 < R_2$, om potentialen på den inre cylindern är konstant lika med ϕ_1 och på den yttre är konstant lika med ϕ_2. (2p)

   (b) Motsvarande problem då den inre cylindern ges av $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ (där potentialen $= \phi_1$) och den större ges av $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 9\}$ (där potentialen $= \phi_2$) kan återföras på problemet i (a) genom att man avbildar området mellan cirklarna $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ och $\{x^2 + y^2 = 9\}$ konformt på området mellan två cirklar med medelpunkt i origo. Härled en sådan avbildning samt bestäm radierna för bildcirklarna. (2p)