KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE 2010–05–28, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Förklara varför
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}. \qquad (3p)$$

2. Låt $\boldsymbol{F} = (y(1+z^2), z(1+x^2), x(1+y^2))$, låt $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ och låt $\boldsymbol{n}$ vara den enhetsnormal för Σ som är riktad bort från origo. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$
LEDNING: Kan man byta Σ mot en enklare yta? (3p)

3. Låt $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.
   (a) Visa att $u(x,y)$ är harmonisk. (1p)

(b) Härled en funktion $v(x,y)$ som gör att funktionen $f = u(x,y) + i\,v(x,y)$ blir komplext deriverbar. (1p)

(c) Uttryck f som en funktion av $z = x + iy$, så att man till slut får $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. (1p)

4. Låt Ω vara en öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$, och låt $\boldsymbol{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$. Förklara varför

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV,$$

för varje snällt vektorfält $\boldsymbol{F}$.

LEDNING: Räcker att visa att $\boldsymbol{c}\cdot$(vänsterledet) $=$ $\boldsymbol{c}\cdot$(högerledet) för en godtycklig konstant vektor $\boldsymbol{c}$. Det kan också vara lämpligt att använda resultatet i uppgift 1. (3p)

5. En konstant elektrisk stöm som flyter genom en ledare längs z-axeln alstrar ett magnetfält som är proportionellt mot det fält $\boldsymbol{B}$ som i cylinderkoordinaterna ρ, ϕ och z ges av

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$

(a) Visa att $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ utanför z-axeln. (1p)

(b) Visa att $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ utanför z-axeln. (1p)

(c) Låt γ vara spiralkurvan $(\rho, \phi, z) = (t, t, t)$, där $t\colon 0 \to 2\pi$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}.$$ (1p)

6. En punktladdning i origo med laddningen q coulomb ger upphov till det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3}\,\boldsymbol{r},$$

där $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ och $r = |\boldsymbol{r}|$. Låt Ω vara en öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$ och låt $\boldsymbol{n}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$. VISA följande resultat beträffande flödet av $\boldsymbol{E}$ ut genom $\partial\Omega$:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0, \quad \text{om origo ligger utanför } \Omega$$ (1p)

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 4\pi q \quad \text{om origo ligger innanför } \Omega. \qquad \text{(3p)}$$

7. Beräkna den elektrostatiska potentialen V mellan cylindrarna $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1/2)^2+y^2 = (1/2)^2\}$ och $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ om V är $= 0$ på C_1 och $= 100$ på C_2 (man får tänka sig att det är ett litet glapp mellan cylidrarna då $(x,y) \approx (0,0)$).

   LEDNING: Eftersom en translation i z-led inte ändrar någonting, så är detta ett 2-dimensionellt problem:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ då } (x-1/2)^2 + y^2 > (1/2)^2 \text{ och } (x-1)^2 + y^2 < 1, \\ V = 0 \text{ då } (x-1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2, \\ V = 100 \text{ då } (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

(3p)

8. Bestäm en konform avbildning av cirkeltvåhörningen $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 2 \text{ och } |z+1| < 2\}$ på enhetsskivan $\{w \in \mathbb{C} \colon |w| < 1\}$ så att $z = 0$ avbildas på $w = 0$. (4p)

Lycka till!
Olle.