KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE och CMIEL 2010–08–24, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Använd indexräkning för att visa formeln

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]_i &= \epsilon_{ijk}\, a_j\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k = \epsilon_{ijk}\, a_j\, \epsilon_{klm}\, b_l\, c_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j b_l c_m = a_j b_i c_j - a_j b_j c_i \\
&= (a_j c_j)\, b_i - (a_j b_j)\, c_i = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, b_i - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, c_i \\
&= [(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}]_i
\end{aligned}$$

2. Verifiera att divergenssatsen

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV$$

stämmer då $\boldsymbol{F} = (4xz, -y^2, yz)$ och Ω är enhetskuben $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$. (3p)

Lösning: Vi börjar med vänsterledet. $\partial\Omega$ består av 6 sidor, som vi behandlar i tur och ordning.

framsidan:

$$x = 1,\ \boldsymbol{F} = (4z, -y^2, yz),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (1, 0, 0) \implies \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 4z \implies$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} 4z\, dydz = [2z^2]_0^1 = 2.$$

baksidan:

$$x = 0,\ \boldsymbol{F} = (0, -y^2, yz),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (-1, 0, 0) \implies \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \implies$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0.$$

vänster sida:

$$y = 0,\ \boldsymbol{F} = (4xz, 0, 0),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (0, -1, 0) \implies \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \implies$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0.$$

höger sida:

$$y = 1,\ \boldsymbol{F} = (4xz, -1, z),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (0, 1, 0) \implies \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -1 \implies$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -1.$$

ovansidan:

$$z = 1,\ \boldsymbol{F} = (4x, -y^2, y),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (0, 0, 1) \implies \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = y \implies$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{x=0}^{1} \int_{y-0}^{1} y\, dxdy = [y^2/2]_0^1 = 1/2.$$

undersidan:

$$z = 0,\ \boldsymbol{F} = (0, -y^2, 0),\ \hat{\boldsymbol{n}} = (0, 0, -1) \Longrightarrow \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \Longrightarrow$$
$$\iint \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0.$$

Så totalt fås
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 2 - 1 + 1/2 = 3/2.$$

Sedan tittar vi på högerledet. $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 4z - 2y + y = 4z - y \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 [2z^2 - yz]_{z=0}^{z=1}\, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (2 - y)\, dxdy = \int_0^1 [2y - y^2/2]_{y=0}^{y=1}\, dx \\
&= \int_0^1 3/2\, dx = 3/2.
\end{aligned}$$

3. Beräkna alla lösningarna till ekvationen

$$\tan z = 2i,$$

och ange dem på formen $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)

Lösning:

$$\tan z = 2i \iff \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = 2i \iff e^{iz} - e^{-iz} = -2e^{iz} - 2e^{-iz} \iff$$
$$3e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1/3 \iff 2iz = \log(-3^{-1})$$
$$= \ln(3^{-1}) + i\,(2n+1)\pi = i\,(2n+1)\pi - \ln 3 \iff$$
$$z = (n + \frac{1}{2})\,\pi + i\,\frac{\ln 3}{2}.$$

4. Verifiera att Stokes' sats

$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

stämmer i det fall då $\boldsymbol{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2z)$, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ med enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ riktad ut från origo, och $\partial\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\, z = 0\}$ är positivt orienterad med avseende på xy-koordinaterna. (3p)

Lösning: $\partial\Sigma$ parametriseras med $(x,y,z) = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, varvid

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}\cdot\, d\boldsymbol{r} = (2\cos\phi - \sin\phi, 0, 0)\cdot\,(-\sin\phi, \cos\phi, 0)\, d\phi\\&= (\sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi)\, d\phi = (\sin^2\phi - \sin 2\phi)\, d\phi\end{aligned}$$

och följaktligen

$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2\phi - \sin 2\phi)\, d\phi = \pi - 0 = \pi.$$

Vidare är

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = (-2yz + 2yz, 0 - 0, 0 + 1) = (0,0,1)$$

och $\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_r = \{\text{t. ex. enligt BETA}\} = \cdots + \boldsymbol{e}_z \cos\theta$, så att $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \cos\theta$. Alltså är

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos\theta\cdot\sin\theta\, d\theta d\phi = \pi\cdot\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta\\&= \frac{\pi}{2}\left[-\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1+1) = \pi.\end{aligned}$$

5. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ha volymen V, och låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor. Beräkna integralen

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\, dS,$$

där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen och $\boldsymbol{r}$ betecknar ortsvektorn (x_1, x_2, x_3). (4p)

LEDNING: Följande variant av divergenssatsen finns i BETA:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\times\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint_\Omega \nabla\times\boldsymbol{F}\, dV.$$

Lösning:

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\, dS = -\iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_\Omega \nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\, dV.$$

$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ fås snabbast med indexräkning. Eller på föjande sätt:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$$

och

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ a_2x_3 - a_3x_2 & a_3x_1 - a_1x_3 & a_1x_2 - a_2x_1 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 + a_1, a_2 + a_2, a_3 + a_3) = 2\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

Därmed blir

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\, dV = 2\boldsymbol{a} \iiint_{\Omega} dV = 2\boldsymbol{a}\, V.$$

6. I $\mathbb{R}^3$ införs ett kroklinjigt koordinatsystem $\{u, v, w\}$ genom sambanden

$$\begin{cases} x = u, \\ y = (v^2 - w^2)/2, \\ z = vw. \end{cases}$$

Härled basvektorerna $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ och skalfaktorerna h_u, h_v, h_w, samt visa att dessa basvektorer bildar ett ortonormerat högersystem. Ange också hur divergensen av ett vektorfält

$$\boldsymbol{F} = (F_u(u, v, w), F_v(u, v, w), F_w(u, v, w))$$

uttrycks i de nya koordinaterna. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= (dx, dy, dz) = (du, v\, dv - w\, dw, w\, dv + v\, dw) \\ &= (1, 0, 0)\, du + (0, v, w)\, dv + (0, -w, v)\, dw \\ &= du\, (1, 0, 0) + \sqrt{v^2 + w^2}\, dv\, \frac{(0, v, w)}{\sqrt{v^2 + w^2}} + \sqrt{v^2 + w^2}\, dw\, \frac{(0, -w, v)}{\sqrt{v^2 + w^2}} \\ &= h_u\, du\, \boldsymbol{e}_u + h_v\, dv\, \boldsymbol{e}_v + h_w\, dw\, \boldsymbol{e}_w \end{aligned}$$

med

$$\boldsymbol{e}_u = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_v = \frac{(0,v,w)}{\sqrt{v^2+w^2}},\ \boldsymbol{e}_w = \frac{(0,-w,v)}{\sqrt{v^2+w^2}}$$

och

$$h_u = 1,\ h_v = h_w = \sqrt{v^2+w^2}.$$

Härav följer omedelbart att $\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_w = 0$, det vill säga att dessa enhetsvektorer är inbördes ortogonala. Vidare är

$$\boldsymbol{e}_u \times \boldsymbol{e}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}} \end{vmatrix} = \frac{(0,-w,v)}{\sqrt{v^2+w^2}} = \boldsymbol{e}_w,$$

så att $\{\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w\}$ bildar ett högersystem. Till slut är

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{F} &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right) \\ &= \frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{1}{v^2+w^2}\left(\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{v^2+w^2}\, F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(\sqrt{v^2+w^2} F_w)\right). \end{aligned}$$

7. Härled en konform avbildning av $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 1,\ |z| < \sqrt{2}\}$ på övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}\ w > 0\}$. (3p)

Lösning: Avbilda först cirkeltvåhörningen Ω på ett vinkelområde så att hörnpunkterna $1+i$ och $1-i$ hamnar på ∞ respektive 0 (till exempel) genom Möbiusfunktionen

$$w_1 = \frac{z-1+i}{z-1-i}.$$

Då är $w_1(1) = -1$ och vinkeln vid $w_1 = 0$ blir lika med vinkeln vid hörnpunkten $z = 1-i$ som är $\pi/4$, eftersom triangeln med hörnen 0, 1 och $1-i$ har vinkeln $\pi/4$ vid $1-i$ (och 0) och en radie alltid är vinkelrät mot cirkelperiferin. Bilden blir därmed vinkelområdet $\{w_1 \in \mathbb{C} \colon 3\pi/4 < \arg w_1 < \pi\}$.

Vrid sedan detta med vinkeln $-3\pi/4$:

$$w_2 = e^{-i\,3\pi/4} \cdot w_1$$

för att få vinkelområdet $\{0 < \arg w_2 < \pi/4\}$.

Till slut multiplicerar vi vinkeln $\pi/4$ med 4 genom

$$w = w_2^4 = e^{-3\pi i} \cdot w_1^4 = -\left(\frac{z-1+i}{z-1-i}\right)^4$$

och får $\{w \in \mathbb{C} \colon 0 < \arg w < \pi\}$ = övre w-halvplanet.

8. Lös följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \text{ i } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1,\ y > 0\}, \\ g = 10 \text{ då } x^2+y^2 = 1 \text{ och } y > 0, \\ g = 0 \text{ då } -1 < x < 1 \text{ och } y = 0, \end{cases}$$

samt verifiera att den funna lösningen verkligen satisfierar randvillkoren. (4p)

Lösning: Vi förenklar problemet genom att utnyttja att Laplaces ekvation bevaras under konforma avbildningar.

Om $z = -1$ skickas till $w_1 = 0$ och $z = 1$ skickas till $w_1 = \infty$ med Möbiusfunktionen

$$w_1 = \frac{z+1}{z-1}$$

så blir bildområdet lika med 3:e kvadranten i w_1-planet eftersom $w_1(0) = -1$ och vinkeln vid $z = -1$ bevaras. Sedan fås första kvadranten genom att vrida med $-\pi$:

$$w = e^{-i\pi}\, w_1 = -\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Med $w = u + iv$ fås därmed följande randvärdesproblem i (u,v)-planet:

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \text{ då } u > 0 \text{ och } v > 0 \\ g = 10 \text{ då } u = 0, \\ g = 0 \text{ då } v = 0 \end{cases}$$

med den uppenbara lösningen

$$g = 10 \cdot \frac{2}{\pi} \arg w = \frac{20}{\pi} \arctan \frac{v}{u}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} u + iv = w = \frac{1+z}{1-z} &= \frac{(1+x)+iy}{(1-x)-iy} \cdot \frac{(1-x)+iy}{(1-x)+iy} \\ &= \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2} \end{aligned}$$

så blir

$$\frac{v}{u} = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

och

$$g(x,y) = \frac{20}{\pi} \arctan \frac{2y}{1-x^2-y^2}.$$

Kontroll av randvärdena:

$$\begin{aligned} &y > 0 \text{ och } x^2+y^2 \text{ växer mot } 1 \Longrightarrow \frac{2y}{1-x^2-y^2} \to +\infty \Longrightarrow \\ &g \to \frac{20}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 10; \\ &y \text{ avtar mot } 0 \Longrightarrow g \to \frac{20}{\pi} \cdot 0 = 0 : \end{aligned}$$

STÄMMER!