KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE och CMIEL 2010–08–24, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Använd indexräkning för att visa formeln
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}. \qquad \text{(3p)}$$

2. Verifiera att divergenssatsen
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV$$
stämmer då $\boldsymbol{F} = (4xz, -y^2, yz)$ och Ω är enhetskuben:
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}. \qquad \text{(3p)}$$

3. Beräkna alla lösningarna till ekvationen
$$\tan z = 2i,$$
och ange dem på formen $a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)

4. Verifiera att Stokes' sats
$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$
stämmer i det fall då $\boldsymbol{F} = (2x - y, -yz^2, -y^2 z)$, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$ med enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ riktad ut från origo, och $\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ är positivt orienterad med avseende på xy-koordinaterna. (3p)

5. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ha volymen V, och låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor. Beräkna integralen

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\, dS,$$

där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen och $\boldsymbol{r}$ betecknar ortsvektorn (x_1, x_2, x_3). (4p)

LEDNING: Följande variant av divergenssatsen finns i BETA:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint_{\Omega} \nabla \times \boldsymbol{F}\, dV.$$

6. I $\mathbb{R}^3$ införs ett kroklinjigt koordinatsystem $\{u, v, w\}$ genom sambanden

$$\begin{cases} x = u, \\ y = (v^2 - w^2)/2, \\ z = vw. \end{cases}$$

Härled basvektorerna $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ och skalfaktorerna h_u, h_v, h_w, samt visa att dessa basvektorer bildar ett ortonormerat högersystem. Ange också hur divergensen av ett vektorfält

$$\boldsymbol{F} = (F_u(u, v, w), F_v(u, v, w), F_w(u, v, w))$$

uttrycks i de nya koordinaterna. (3p)

7. Härled en konform avbildning av $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 1,\ |z| < \sqrt{2}\}$ på övre halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}\ w > 0\}$. (3p)

8. Lös följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \text{ i } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}, \\ g = 10 \text{ då } x^2 + y^2 = 1 \text{ och } y > 0, \\ g = 0 \text{ då } -1 < x < 1 \text{ och } y = 0, \end{cases}$$

samt verifiera att den funna lösningen verkligen satisfierar randvillkoren. (4p)