KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL 2010–12–13, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Visa först att vektorfältet $\boldsymbol{F} = e^{xyz}\,(yz, xz, xy)$ är konservativt, och beräkna sedan linjeintegralen

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Man ser lätt att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\phi$ med $\phi = e^{xyz}$, så att

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \operatorname{grad}\phi \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\phi$$
$$= \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = e - 1.$$

2. Låt $\boldsymbol{F} = (1, 0, z)$, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, och låt $\hat{\boldsymbol{n}}$ vara den enhetsnormal till Σ som har en positiv z-komponent. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Sätt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$ och $\Sigma^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1,\ z = 0\}$. Då är $\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma^*$, och enligt Gauss är

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS + \iint_{\Sigma^*} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV.$$

$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 1 \Longrightarrow \displaystyle\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \text{volymen av halvklotet } \Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3$ $= 2\pi/3$. På Σ^* är $\boldsymbol{F} = (1, 0, 0)$ och $\hat{\boldsymbol{n}} = (0, 0, -1)$, så $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0$, och därmed blir $\iint_{\Sigma^*} = 0$. Så tillsammans fås

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 2\pi/3.$$

3. Visa att $u(x, y) = 2x(1 - y)$ satisfierar Laplaces ekvation, och härled sedan en deriverbar komplex funktion $f(z)$ som uppfyller $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. (3p)

Lösning: Man ser lätt att $\partial^2 u/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$, så $\Delta u = 0$. Den sökta funktionen $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ fås sedan genom att lösa ut v ur CR-ekvationerna:

$$\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = 2 - 2y \Longrightarrow v = 2y - y^2 + g(x);$$
$$\partial v/\partial x = g'(x) = -\partial u/\partial y = 2x \Longrightarrow g = x^2 + C \Longrightarrow v = 2y - y^2 + x^2 + C.$$

Därmed blir

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = 2x - 2xy + i \cdot 2y - i \cdot y^2 + i \cdot x^2 + iC \\ &= 2(x + iy) + i\,(x^2 + i \cdot 2xy + (iy)^2) + iC = 2z + iz^2 + iC. \end{aligned}$$

4. Divergenssatsen säger att

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV.$$

(a) Använd denna för att visa följande variant:

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV. \qquad \text{(3p)}$$

LEDNING: Skalärmultiplicera med en konstant vektor.

Lösning: Låt $\boldsymbol{a}$ vara en *godtycklig* konstant vektor. Då blir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \{\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}) = \hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F})\} \\ &= \iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}) \boldsymbol{\cdot} \hat{\boldsymbol{n}}\ dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F})\, dV. \end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, a_j F_k \right) = \sum_j a_j \cdot \left(\sum_{i,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_j a_j \cdot \left(-\sum_{i,k} \epsilon_{jik} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) = -\sum_j a_j \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_j \\ &= -\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

Så

$$\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\,\boldsymbol{a} \boldsymbol{\cdot} \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV;$$

sant för *alla* $\boldsymbol{a} \Longrightarrow$

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV.$$

(b) Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$. Beräkna

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{r} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \\ \Longrightarrow \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{r}\, dV = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

5. I Cartesiska koordinater används de *konstanta* basvektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ och $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. Det är då naturligt att definiera Laplaceoperatorn Δ verkande på vektorfält genom

$$\Delta \boldsymbol{F} = \Delta\left(\sum_{i=1}^{3} F_i\,\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \Delta F_i\,\boldsymbol{e}_i.$$

(a) Visa att

$$\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \qquad (*)$$

i det Cartesiska fallet.

LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (2p)

Lösning:

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla \times \boldsymbol{F})_k = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{l,m}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}F_m$$

$$= \sum_{j,l,m}\left(\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\right)\frac{\partial^2 F_m}{\partial x_j \partial x_l} = \sum_{j,l,m}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 F_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \left(\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)F_i$$

$$= (\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}))_i - \Delta F_i \Longrightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \Delta\boldsymbol{F}$$

$$\Longrightarrow \Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}.$$

(b) Högerledet i (*) är koordinatoberoende, och därför kan (*) tas som definition av Δ verkande på vektorfält i det allmänna fallet.

Låt r, θ och ϕ vara sfäriska koordinater. Beräkna

$$\Delta \boldsymbol{e}_\phi. \qquad (1p)$$

Lösning:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}(r\cdot 1) = 0 \Longrightarrow \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\phi = 0;$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\,\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ 0 & 0 & r\sin\theta\cdot 1 \end{vmatrix} = \frac{\cot\theta}{r}\,\boldsymbol{e}_\phi - \frac{1}{r}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\,\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ \cot\theta/r & -r\cdot 1/r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{-d(\cot\theta)/d\theta}{r}\,\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$

Så

$$\Delta\boldsymbol{e}_\phi = \frac{-1}{r^2\sin^2\theta}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$

6. Låt Ω vara ett område i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$. Antag att funktionen ϕ är konstant $=$ C på $\partial\Omega$ och att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är divergensfritt: $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$. Beräkna

$$\iiint_\Omega \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{F}\ dV. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Eftersom $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F}) = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{F} + \phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{F}$, så blir

$$\iiint_\Omega \nabla\phi\cdot\boldsymbol{F}\ dV = \iiint_\Omega \nabla\cdot(\phi\,\boldsymbol{F})\,dV = \{\text{ Gauss }\}$$

$$= \iint_{\partial\Omega} \phi\,\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = C\cdot\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \{\text{ Gauss igen }\}$$

$$= C\cdot\iiint_{\partial\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV = 0.$$

7. Visa att

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad |z| = 1 \text{ och } z\neq 1. \qquad \text{(2p)}$$

Lösning: Möbiusfunktionen $w = 1/(1-z)$ skickar punkten $z = 1$ på enhetscirkeln i z-planet till $w = \infty$, och därmed blir bilden av enhetscirkeln en rät linje. Eftersom $w(-1) = 1/2$, går denna genom $w = 1/2$. Reella z-axeln avbildas på reella w-axeln, och vinkeln $\pi/2$

mellan enhetscirkeln och reella z-axeln vid $z = -1$ bevaras, så bildlinjen blir ortogonal mot reella w-axeln vid $w = 1/2$. Och ges alltså av $\operatorname{Re} w = 1/2$. Det vill säga,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}.$$

8. Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då } x < 0 \text{ och } 0 < y < \pi, \\ \phi(x,0) = \phi(x,\pi) = 0 \quad \text{då } x < 0, \\ \phi(0,y) = 1 \quad \text{då } 0 < y < \pi, \end{cases}$$

och kontrollera sedan att den funna lösningen verkligen satisfierar randvillkoren. (5p)

Lösning: Vi avbildar först området $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z < 0 \text{ och } 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ på ett enklare område med hjälp av en konform avbildning – varvid Laplaces ekvation bevaras.

Börja med

$$w_1 = e^z.$$

Horisontella linjen $\{x < 0,\, y = 0\}$ avbildas då på räta linjestycket $\{0 < u_1 < 1,\, v_1 = 0\}$, vertikala linjen $\{x = 0,\, 0 < y < \pi\}$ på halvcirkeln $\{u_1^2 + v_1^2 = 1,\, v_1 > 0\}$ och den horisontella linjen $\{x < 0,\, y = \pi\}$ på linjestycket $\{-1 < u_1 < 0,\, v_1 = 0\}$. Härav följer att bilden av halvbandet blir övre halvan av enhetsskivan i w_1-planet – det vill säga en cirkeltvåhörning.

Skicka härnäst hörnpunkten -1 till 0 och hörnpunkten 1 till ∞ med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w_2 = \frac{w_1+1}{w_1-1} = \frac{e^z+1}{e^z-1}.$$

Eftersom $w_1 = 0 \implies w_2 = -1$ ser man att randstycket $\{-1 < u_1 < 1,\, v_1 = 0\}$ avbildas på negativa reella w_2-axeln. Då räta vinkeln vid $w_1 = -1$ bevaras inser man att $\{u_1^2 + u_2^2 = 1,\, v_1 > 0\}$ avbildas på negativa imaginära w_2-axeln – så att bildområdet blir 3:e kvadranten i w_2-planet.

Denna kvadrant skickas därefter till den fösta kvadranten i w-planet genom vridning med vinkeln $-\pi$:

$$w = e^{-i\pi} \cdot w_2 = -w_2 = \frac{1+e^z}{1-e^z}.$$

Vi har därmed avbildat det ursprungliga halvbandet i z-planet på första kvadranten i w-planet. Halvbandets randstycken motsvarar kvadrantens på följande sätt:

$$\begin{aligned} \{x<0,\, y=0\} &\leftrightarrow \{1<u<\infty,\, v=0\} \\ \{x<0,\, y=\pi\} &\leftrightarrow \{0<u<1,\, v=0\} \\ \{x=0,\, 0<y<\pi\} &\leftrightarrow \{u=0,\, 0<v<\infty\}. \end{aligned}$$

Detta betyder att vi får följande Dirichletproblem i uv-planet:

$$\begin{cases} \Delta\,\phi = 0 & \text{då } u>0,\, v>0, \\ \phi(u,0) = 0 & \text{då } u>0, \\ \phi(0,v) = 1 & \text{då } v>0. \end{cases}$$

En uppenbar lösning till detta problem är

$$\phi(u,v) = \frac{2}{\pi}\arg w = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{v}{u},$$

eftersom $\log w = \ln|w| + i\arg w$ är komplext deriverbar då $w \neq 0$, varför imaginärdelen $\arg w$ är harmonisk utanför origo.

Låt oss tillslut gå tillbaka till xy-variablerna:

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi}\,\arctan\frac{\operatorname{Im}\frac{1+e^z}{1-e^z}}{\operatorname{Re}\frac{1+e^z}{1-e^z}},$$

där

$$\begin{aligned} \frac{1+e^z}{1-e^z} &= \frac{1+e^x\cos y + i\,e^x\sin y}{1-e^x\cos y - i\,e^x\sin y}\cdot\frac{(1-e^x\cos y)+i\,e^x\sin y}{(1-e^x\cos y)+i\,e^x\sin y} \\ &= \frac{1-e^{2x}\cos^2 y - e^{2x}\sin^2 y + i\,e^x\sin y(1+e^x\cos y+1-e^x\cos y)}{\ldots} \\ &= \frac{1-e^{2x}+i\cdot 2e^x\sin y}{\ldots}, \end{aligned}$$

så att

$$\frac{\operatorname{Im} \frac{1+e^z}{1-e^z}}{\operatorname{Re} \frac{1+e^z}{1-e^z}} = \frac{2e^x \sin y}{1-e^{2x}}.$$

Vi får alltså följande svar:

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2e^x \sin y}{1-e^{2x}}\right) \qquad \text{då } x < 0 \text{ och } 0 < y < \pi.$$

Kontroll av randvärdena:

$$y = 0 \text{ eller } \pi \Longrightarrow \sin y = 0 \Longrightarrow \phi(x,0) = \phi(x,\pi) = 0;$$

$$x \nearrow 0 \Longrightarrow 1 - e^{2x} \searrow 0 \Longrightarrow \phi(1,y) \to \frac{2}{\pi} \arctan \infty = 1.$$