KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL 2010–12–13, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Visa först att vektorfältet $\boldsymbol{F} = e^{xyz}\,(yz, xz, xy)$ är konservativt, och beräkna sedan linjeintegralen
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \qquad \text{(3p)}$$

2. Låt $\boldsymbol{F} = (1, 0, z)$, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, och låt $\hat{\boldsymbol{n}}$ vara den enhetsnormal till Σ som har en positiv z-komponent. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS. \qquad \text{(3p)}$$

3. Visa att $u(x, y) = 2x(1-y)$ satisfierar Laplaces ekvation, och härled sedan en deriverbar komplex funktion $f(z)$ som uppfyller $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. (3p)

4. Divergenssatsen säger att
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV.$$
   (a) Använd denna för att visa följande variant:
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, dV. \qquad \text{(3p)}$$
   LEDNING: Skalärmultiplicera med en konstant vektor.

(b) Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$. Beräkna

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS. \qquad \text{(1p)}$$

5. I Cartesiska koordinater används de *konstanta* basvektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$. Det är då naturligt att definiera Laplace-operatorn Δ verkande på vektorfält genom

$$\Delta \boldsymbol{F} = \Delta \left(\sum_{i=1}^{3} F_i\, \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \Delta F_i\, \boldsymbol{e}_i.$$

(a) Visa att

$$\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \qquad (*)$$

i det Cartesiska fallet.

LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (2p)

(b) Högerledet i (*) är koordinatoberoende, och därför kan (*) tas som definition av Δ verkande på vektorfält i det allmänna fallet.

Låt r, θ och ϕ vara sfäriska koordinater. Beräkna

$$\Delta\, \boldsymbol{e}_\phi. \qquad \text{(1p)}$$

6. Låt Ω vara ett område i $\mathbb{R}^3$ med randytan $\partial\Omega$. Antag att funktionen ϕ är konstant = C på $\partial\Omega$ och att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är divergensfritt: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Beräkna

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \phi \cdot \boldsymbol{F}\ dV. \qquad \text{(3p)}$$

7. Visa att

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad |z| = 1 \text{ och } z \neq 1. \qquad \text{(2p)}$$

8. Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då } x < 0 \text{ och } 0 < y < \pi, \\ \phi(x, 0) = \phi(x, \pi) = 0 \quad \text{då } x < 0, \\ \phi(0, y) = 1 \quad \text{då } 0 < y < \pi, \end{cases}$$

och kontrollera sedan att den funna lösningen verkligen satisfierar randvillkoren. (5p)

Lycka till!
Olle.