KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE 2011–05–23, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, $r = |\boldsymbol{r}|$, och låt λ vara en positiv konstant. Beräkna

   (a) $\operatorname{div}(r^\lambda \boldsymbol{r})$, (1p)

   (b) $\operatorname{rot}(r^\lambda \boldsymbol{r})$, (1p)

   (c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$, där $\boldsymbol{\omega}$ är en konstant vektor. (1p)

   Lösning: (a) $\nabla \cdot (r^\lambda \boldsymbol{r}) = \nabla(r^\lambda) \cdot \boldsymbol{r} + r^\lambda\, \nabla \cdot \boldsymbol{r}$, där

$$[\nabla(r^\lambda)]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} r^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{\lambda/2}$$
$$= \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{\frac{\lambda-2}{2}} \cdot 2x_i = \lambda x_i \cdot r^{\lambda-2},$$

så att $\nabla(r^\lambda) = \lambda r^{\lambda-2}\,\boldsymbol{r}$, och $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \nabla\cdot(x_1,x_2,x_3) = 3$. Därmed blir

$$\nabla\cdot(r^\lambda\boldsymbol{r}) = \lambda r^{\lambda-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + r^\lambda\cdot 3 = (\lambda+3)\,r^\lambda.$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla\times(r^\lambda\boldsymbol{r}) &= \nabla(r^\lambda)\times\boldsymbol{r} + r^\lambda\,\nabla\times\boldsymbol{r}\\ &= \lambda\,r^{\lambda-2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r} + r^\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}\\ &= (\omega_2x_3-\omega_3x_2,\omega_3x_1-\omega_1x_3,\omega_1x_2-\omega_2x_1) \Longrightarrow\\ \nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3\\ \omega_2x_3-\omega_3x_2 & \omega_3x_1-\omega_1x_3 & \omega_1x_2-\omega_2x_1\end{vmatrix}\\ &= (\omega_1+\omega_1,\omega_2+\omega_2,\omega_3+\omega_3) = 2\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

2. Låt Σ vara cylindern $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=2ax,\ 0\le z\le b\}$, där a och b är positiva tal, och låt $\boldsymbol{F}=(x,\cos(z^2),e^z)$. Beräkna flödesintegralen
$$\mathcal{I} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS,$$
där enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar ut från cylinderns mittlinje. (3p)

Lösning: $x^2-2ax=(x-a)^2-a^2 \Longrightarrow \Sigma$ ges av

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2,\\ 0\le z\le b.\end{cases}$$

Låt $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon (x-a)^2+y^2\le a^2, 0\le z\le b\}$. Med $O=$ Ω:s ovansida $\{(x-a)^2+y^2\le a^2, z=b\}$, och $U=\Omega$:s undersida $\{(x-a)^2+y^2\le a^2, z=0\}$ fås $\partial\Omega=\Sigma\cup O\cup U$, och

$$\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_\Sigma + \iint_O + \iint_U = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV,$$

så att

$$\mathcal{I} = \iiint_\Sigma \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV - \iint_O \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS - \iint_U \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS.$$

$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot (x, \cos(z^2), e^z) = 1 + e^z \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV &= \iint_{(x-a)^2+y^2 \le a^2} \left(\int_{z=0}^{z=b} (1+e^z)\, dz \right) dxdy \\ &= (b + e^b - 1) \cdot (\text{ arean av en cirkelskiva med radien } = a) \\ &= (b + e^b - 1) \cdot \pi a^2.\end{aligned}$$

Ovansidan: $\hat{\boldsymbol{n}} = ((0,0,1), z = b \Longrightarrow \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = e^b \cdot 1 \Longrightarrow \iint_O \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = e^b \cdot \pi a^2$.

Undersidan: $\hat{\boldsymbol{n}} = (0,0,-1), z = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -1 \Longrightarrow \iint_U \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, ds = -1 \cdot \pi a^2$.

Tillsammans:

$$\mathcal{I} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \pi a^2 (b + e^b - 1 - e^b + 1) = \pi a^2 b.$$

3. Visa först att

$$w = \sin z \iff z = -i \log(iw + (1-w^2)^{1/2})$$

genom att lösa ut z ur ekvationen $w = \sin z$ (snarare än att läsa innantill i BETA), och ange sedan *alla* lösningarna till ekvationen $\sin z = 10$ på formen $a + ib$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}&w = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \iff e^{iz} - e^{-iz} - 2iw = 0 \iff \\ &(e^{iz})^2 - 2iw\, e^{iz} - 1 = 0 \iff e^{iz} = iw + (-w^2+1)^{1/2} \iff \\ &iz = \log(iw + (1-w^2))^{1/2} \iff z = -i \log(iw + \sqrt{1-w^2}).\end{aligned}$$

För $w = 10$ fås $\sin z = 10 \iff z = \arcsin 10$, som alltså ges av

$$\begin{aligned}\arcsin 10 &= -i \log(10i + (1-100)^{1/2}) = -i \log(i \cdot (10 \pm \sqrt{99})) \\ &= -i\,(\ln(10 \pm \sqrt{99}) + i\pi/2 + i \cdot 2\pi n) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n - i \ln(10 \pm \sqrt{99}), \quad \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.\end{aligned}$$

ln taget på ekvationen $(10+\sqrt{99})(10-\sqrt{99}) = 100-99 = 1$ ger

$\ln(10+\sqrt{99})+\ln(10-\sqrt{99}) = 0 \iff \ln(10-\sqrt{99}) = -\ln(10+\sqrt{99})$.

Därmed blir

$$\arcsin 10 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \pm i\,\ln(10+\sqrt{99}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. (a) Härled formeln

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}). \qquad \text{(2p)}$$

(b) Partiella integrationen i envariabeln säger att

$$\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot g\,dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot \frac{dg}{dx}\,dx.$$

Visa följande variant i 3 dimensioner:

$$\iiint_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}\,dV = \iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\;dS + \iiint_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}\,dV. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} F_j G_k \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} F_j \right) G_k + \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} G_k \right) F_j \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \right) G_k - \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} G_k \right) F_j \\
&= (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{G} - (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{F}\,.
\end{aligned}$$

(b) Divergenssatsen $\Longrightarrow$

$$\iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\;dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})\,dV = \{\text{ enligt (a)}\}$$
$$= \iiint_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}\,dV - \iiint_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}\,dV$$

– vilket skulle visas.

5. Låt $\mathcal{C}$ vara en cirkel med radien R i planet

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + y + 2z = 7\},$$

och låt $\boldsymbol{F} = (-z, x, y)$. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där omloppsriktningen är godtycklig (så att man får två värden).

LEDNING: Stokes! (3p)

Lösning: Låt $\mathcal{D}$ vara den cirkelskiva i planet som begränsas av cirkeln $\mathcal{C}$. Enligt Stokes är då

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dS,$$

där

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -z & x & y \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

och

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \pm \frac{(2, 1, 2)}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \pm \frac{1}{3}(2, 1, 2),$$

så att

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (1, -1, 1) \cdot \left(\pm \frac{1}{3}\right)(2, 1, 2) = \pm \frac{1}{3}(2 - 1 + 2) = \pm 1.$$

Därmed blir

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \pm \iint_{\mathcal{D}} dS = \pm \pi R^2.$$

6. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ uttrycks i sfäriska koordinater genom

$$\boldsymbol{F} = \frac{\cos\theta}{r^2} \boldsymbol{e}_r \quad \text{då } r \neq 0.$$

Låt Ω vara en kropp i $\mathbb{R}^3$. Beräkna det totala flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom randytan $\partial\Omega$ då

(a) origo ligger utanför Ω, (2p)

(b) origo är en inre punkt i Ω. (2p)

Lösning: Observera att

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \cdots = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta = 0 \quad \text{då } r \neq 0.$$

(a) Då origo ligger utanför Ω ger divergenssatsen att

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = 0.$$

(b) Välj $\epsilon > 0$ så litet att bollen $B_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon\}$ ligger inuti Ω, och sätt $\Omega^* = \Omega \setminus B_\epsilon$. Då är

$$\begin{aligned} 0 = \iiint_{\Omega^*} \operatorname{div}\, dV &= \iint_{\partial\Omega^*} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\ &= \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS + \iint_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{F} \cdot (-\hat{\boldsymbol{n}})\, dS, \end{aligned}$$

där det senare $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen för ∂B_ϵ, som är *minus* den utåtriktade enhetsnormalen på ∂B_ϵ sett från Ω^*:s perspektiv. Alltså är

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS.$$

På ∂B_ϵ är $r = \epsilon$, $\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_r$ och $\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \cos\theta/\epsilon^2$, varför

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\epsilon} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\epsilon^2} \cdot \epsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \\ &= \pi \left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

7. Bestäm bilden av cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - 2| < 1\}$ under följande avbildningar:

(a) $w = 3iz$, (1p)

(b) $w = (z - 2)/(z - 1)$, (1p)

(c) $w = 1/z$. (1p)

Lösning: (a) $\quad w = 3iz \iff z = w/3i$, så att

$$|z-2| < 1 \iff \left|\frac{w}{3i} - 2\right| < 1 \iff \frac{|w-6i|}{3} < 1 \iff |w-6i| < 3,$$

det vill säga cirkelskivan med medelpunkt i $w = 6i$ och radien $=3$.

(b) $\quad w = (z-2)/(z-1)$ är en Möbiusavbildning där $z = 1$ skickas till $w = \infty$, så att randcirkeln $\{|z-2| = 1\}$ avbildas på en rät linje. Då $w(3) = 1/2$ går denna genom $w = 1/2$. Vinklar och reella axeln bevaras $\Longrightarrow$ räta vinkeln mot reella axeln vid $z = 3$ övergår i en rät vinkel mot reella axeln vid $w = 1/2$, varför vår räta linje ges av $\operatorname{Re} w = 1/2$. Eftersom den inre punkten $z = 2$ skickas till $w = 0$ ser vi att bildområdet blir halvplanet $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w < 1/2\}$.

(c) $\quad w = 1/z \iff z = 1/w$, så med $w = u + iv$ fås

$$|z-2| < 1 \iff \left|\frac{1}{w} - 2\right| < 1 \iff |2w-1| < |w| \iff$$

$$(2u-1)^2 + 4v^2 < u^2 + v^2 \iff 4u^2 - 4u + 1 + 4v^2 < u^2 + v^2 \iff$$

$$3u^2 - 4u + 1 + 3v^2 < 0 \iff 3\left(u^2 - \frac{4}{3}u\right) + 1 + 3v^3 < 0 \iff$$

$$3\left((u-2/3)^2 - 4/9\right) + 1 + 3v^2 < 0 \iff 3(u-2/3)^2 + 3v^2 < 1/3 \iff$$

$$\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \iff \left|w - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}.$$

8. Bestäm en reell funktion $\phi(x,y)$, definierad på den slutna enhetsskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1\}$, som uppfyller Laplaces ekvation i det inre:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då } x^2 + y^2 < 1,$$

och som på randcirkeln $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ antar följande värden:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0,\ y > 0, \\ 2 & \text{då } x < 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{då } y < 0. \end{cases}$$

Kontrollera sedan att din lösning $\phi(x,y)$ verkligen uppfyller randvillkoren. (4p)

Lösning: Börja till exempel med att skicka $z = 1$ till 0 och $z = -1$ till ∞ med en Möbius:

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}.$$

Då $w_1(i) = \cdots = i$ ser vi att randcirkeln avbildas på den räta linjen $\{\operatorname{Re} w = 0\}$ genom 0 och i. Och då den inre punkten $z = 0$ skickas till $w = -1$ följer det att enhetsskivan avbildas på vänstra halvplanet $\{\operatorname{Re} w < 0\}$. Låt oss vrida detta med vinkeln $-\pi/2$:

$$w = e^{-i\pi/2} w_1 = -iw_1 = -i\,\frac{z-1}{z+1},$$

så att bilden i w-planet blir $\operatorname{Im} w > 0$.

Genom att titta på vart randfunktionens diskontinuitetspunkter $z = -1$, $z = 0$ och $z = i$ hamnar så ser vi att vi får följande problem i w-planet $= uv$-planet:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0 \quad \text{då } v > 0,$$

och

$$\phi(u, 0) = \begin{cases} 0 & \text{då } u < 0, \\ 1 & \text{då } 0 < u < 1, \\ 2 & \text{då } u > 1. \end{cases}$$

Men detta är ett standardp.roblem med den välkända lösningen

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= 2 - \frac{1}{\pi} \arg(w-1) - \frac{1}{\pi} \arg w \\ &= 2 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{u-1}{v} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{u}{v}, \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} u + iv &= -i\,\frac{z-1}{z+1} = -i\,\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} \\ &= -i\,\frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}, \end{aligned}$$

det vill säga

$$\begin{cases} u = \dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}, \\ v = \dfrac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

och

$$\frac{u}{v} = \frac{2y}{1-x^2-y^2},$$
$$\frac{u-1}{v} = \frac{2y-(x+1)^2-y^2}{1-x^2-y^2} = \frac{2(y-x-1)+(1-x^2-y^2)}{1-x^2-y^2}$$
$$= \frac{2(y-x-1)}{1-x^2-y^2} + 1.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = 2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\frac{2(y-x-1)}{1-x^2-y^2}+1\right)\\ - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{2y}{1-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Kontroll av randvärdena:
Observera först att

$$\begin{cases} t \to \infty \Longrightarrow \operatorname{arccot} t \to 0, \\ t \to -\infty \Longrightarrow \operatorname{arccot} t \to \pi. \end{cases}$$

(1) $x^2+y^2 \nearrow 1$ då $x>0$, $y>0$:

$$\begin{aligned} y-x-1<0 &\Longrightarrow \frac{2(y-x-1)}{1-x^2-y^2}+1 \to -\infty \\ &\Longrightarrow \operatorname{arccot}(\dots) \to \pi, \\ y>0 &\Longrightarrow \frac{2y}{1-x^2-y^2} \to +\infty \Longrightarrow \operatorname{arccot}(\dots) \to 0, \\ &\Longrightarrow \phi \to 2-1-0 = 2 : \text{OK!} \end{aligned}$$

(2) $x^2+y^2 \nearrow 1$ då $x<0$, $y>0$: Här är $y-x-1>0$, vilket betyder att

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{2(y-x-1)}{1-x^2-y^2}+1\right) \to 0,$$

så att $\phi \to 2-0-0 = 2$: OK!

(3) $x^2+y^2 \nearrow 1$ då $y<0$: Här är $y-x-1<0$, och

$$y<0 \Longrightarrow \operatorname{arccot}\frac{2y}{1-x^2-y^2} \to \pi,$$

varför $\phi \to 2-1-1 = 0$: OK!!