KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE 2011–05–23, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, $r = |\boldsymbol{r}|$, och låt λ vara en positiv konstant. Beräkna

   (a) $\operatorname{div}(r^\lambda \boldsymbol{r})$, (1p)

   (b) $\operatorname{rot}(r^\lambda \boldsymbol{r})$, (1p)

   (c) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$, där $\boldsymbol{\omega}$ är en konstant vektor. (1p)

2. Låt Σ vara cylindern $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 2ax,\ 0 \le z \le b\}$, där a och b är positiva tal, och låt $\boldsymbol{F} = (x, \cos(z^2), e^z)$. Beräkna flödesintegralen

$$\mathcal{I} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS,$$

   där enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar ut från cylinderns mittlinje. (3p)

3. Visa först att

$$w = \sin z \iff z = -i \log(iw + (1 - w^2)^{1/2})$$

genom att lösa ut z ur ekvationen $w = \sin z$ (snarare än att läsa innantill i BETA), och ange sedan *alla* lösningarna till ekvationen $\sin z = 10$ på formen $a + ib$. (3p)

4. (a) Härled formeln

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}). \qquad (2p)$$

(b) Partiella integrationen i envariabeln säger att

$$\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot g\, dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot \frac{dg}{dx}\, dx.$$

Visa följande variant i 3 dimensioner:

$$\iiint_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}\, dV = \iint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS + \iiint_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}\, dV.$$

(1p)

5. Låt $\mathcal{C}$ vara en cirkel med radien R i planet

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + y + 2z = 7\},$$

och låt $\boldsymbol{F} = (-z, x, y)$. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_\mathcal{C} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där omloppsriktningen är godtycklig (så att man får två värden).

LEDNING: Stokes! (3p)

6. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ uttrycks i sfäriska koordinater genom

$$\boldsymbol{F} = \frac{\cos\theta}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r \quad \text{då } r \neq 0.$$

Låt Ω vara en kropp i $\mathbb{R}^3$. Beräkna det totala flödet av $\boldsymbol{F}$ ut genom randytan $\partial\Omega$ då

(a) origo ligger utanför Ω, (2p)

(b) origo är en inre punkt i Ω. (2p)

7. Bestäm bilden av cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-2| < 1\}$ under följande avbildningar:

   (a) $w = 3iz$, (1p)

   (b) $w = (z-2)/(z-1)$, (1p)

   (c) $w = 1/z$. (1p)

8. Bestäm en reell funktion $\phi(x, y)$, definierad på den slutna enhetsskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$, som uppfyller Laplaces ekvation i det inre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då } x^2 + y^2 < 1,$$

   och som på randcirkeln $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ antar följande värden:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{då } x > 0,\ y > 0, \\ 2 & \text{då } x < 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{då } y < 0. \end{cases}$$

   Kontrollera sedan att din lösning $\phi(x, y)$ verkligen uppfyller randvillkoren. (4p)

Lycka till!
Olle.