KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE och CMIEL 2011–08–23, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Härled formeln

$$\boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{G}$$

med hjälp av indexräkning.
LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G}]_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} F_j (\nabla \times \boldsymbol{G})_k \\
&= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} F_j \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} G_m = \sum_{j,l,m} \left(\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \right) F_j \frac{\partial G_m}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j,l,m} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) F_j \frac{\partial G_m}{\partial x_l} = \sum_j \left(F_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} - F_j \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right);
\end{aligned}$$

om man här låter $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{G}$ byta plats samt adderar resultaten så får man

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{F}]_i \\
&= \sum_j \left(F_j \frac{\partial G_j}{\partial x_i} + G_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - F_j \frac{\partial G_i}{\partial x_j} - G_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}(F_j G_j) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla) G_i - (\boldsymbol{G} \cdot \nabla) F_i \\
&= [\operatorname{grad}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{G} - (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{F}]_i
\end{aligned}
$$

för $i = 1, 2, 3 \Longrightarrow$ klart!

2. Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\, y^2 + z^2 \leq 1\}$, och låt $\boldsymbol{F} = (2x^2, y, z + x)$. Beräkna flödesintegralen

$$
\mathcal{I} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS
$$

(där $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar ut ur Ω) på två sätt:

(a) med divergenssatsen, (1p)

(b) direkt. (2p)

Lösning:

(a)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 4x + 1 + 1 \Longrightarrow \mathcal{I} &= \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV \\
&= 2 \iint_{y^2+z^2 \leq 1} \left(\int_{x=0}^{1} (2x + 1)\, dx \right) dydz = 2 \iint_{y^2+z^2 \leq 1} [x^2 + x]_0^1\, dydz \\
&= 4 \iint_{y^2+z^2 \leq 1} dydz = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi.
\end{aligned}
$$

(b) *Mantelytan* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\, y^2 + z^2 = 1\}$:

$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (x, \cos\phi, \sin\phi) \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\, dxd\phi &= \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} dxd\phi \\
&= \pm(0, -\cos\phi, -\sin\phi)\, dxd\phi;
\end{aligned}
$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar utåt $\Longrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = (0, \cos\phi, \sin\phi)\,dxd\phi \Longrightarrow$

$\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = (2x^2, \cos\phi, \sin\phi + x) \cdot (0, \cos\phi, \sin\phi)\,dxd\phi = (1 + x\sin\phi)\,dxd\phi$

$$\Longrightarrow \iint_{\text{mantelytan}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \int_{x=0}^{1} dx \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi + \int_{x=0}^{1} x\,dx \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\phi\,d\phi$$
$= 1 \cdot 2\pi + 0 = 2\pi.$

Sidan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 1,\ y^2 + z^2 \le 1\}$:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = (1, 0, 0) \Longrightarrow \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (2, \ldots, \ldots) \cdot (1, 0, 0) = 2 \Longrightarrow$$
$$\iint_{\ldots} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,ds = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

Sidan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0,\ y^2 + z^2 \le 1\}$:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = -(1, 0, 0) \Longrightarrow \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = (0, \ldots, \ldots) \cdot (-1, 0, 0) = 0$$
$$\Longrightarrow \iint_{\ldots} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = 0.$$

Så totalt fås $\mathcal{I} = 2\pi + 2\pi = 4\pi$.

3. Beräkna *alla* värden som $|(1 + i)^{2+i}|$ antar. (3p)

Lösning:

$$(1 + i)^{2+i} = e^{(2+i)\ \log(1+i)} = e^{(2+i)(\ln\left(2^{1/2}\right) + i\,\pi/4 + i\cdot 2\pi n)}$$
$$= e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln 2 - \pi/4 - 2\pi n + i(\frac{1}{2}\ln 2 + \pi/2 + 4\pi n)}$$
$$\Longrightarrow |\ldots| = e^{\ln 2} \cdot e^{-\pi/4 - 2\pi n} = 2\,e^{-\pi/4 - 2\pi n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. Låt $\boldsymbol{F} = (-x, 0, 2x + z)$.

   (a) Visa att $\boldsymbol{F}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ (det vill säga $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$), som kan beräknas genom ansatsen $\boldsymbol{A} = (0, A_y, 0)$. (1p)

   (b) Låt $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS,$$
   där enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv z-komponent. (2p)

Lösning: (a)

$$\boldsymbol{F} = (-x, 0, 2x+z) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & A_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-\partial A_y/\partial z, 0, \partial A_y/\partial x) \iff \begin{cases} \partial A_y/\partial z = x, \\ \partial A_y/\partial x = 2x + z. \end{cases}$$

Första ekvationen $\Longrightarrow A_y = xz + f(x, y)$; insatt i den andra fås

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = z + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + z \iff f = x^2 + g(y).$$

För att göra det enkelt för oss väljer vi $g(y) = 0$, och får $A_y = x^2 + xz$ samt $\boldsymbol{A} = (0, x^2 + xz, 0)$.

(b)

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där $\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\}$ (ELLER HUR?). På $\partial\Sigma$ är $\boldsymbol{r} = (\cos\phi, \sin\phi, 1)$, så

$$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = (0, \cos^2\phi + \cos\phi \cdot 1, 0) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\, d\phi = (\cos^3\phi + \cos^2\phi)\, d\phi,$$

och

$$\oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^3 d\phi + \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 d\phi.$$

Ritar man först grafen av $\cos\phi$ och sedan grafen av $\cos^3\phi$ genom att upphöja till 3, så kan man inte undgå att se att de positiva respektive negativa bitarna av $\int_o^{2\pi} \cos^3 d\phi$ TAR UT VARANDRA, så denna integral blir $= 0$. Därmed blir

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi = \pi.$$

5. Man inför kroklinjiga koordinater $\{u, v, w\}$ (där $u > 0$, $v > 0$ och $0 \leq w < 2\pi$) genom

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv\, \cos w, 2uv\, \sin w).$$

(a) Bestäm motsvarande basvektorer $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ och $\boldsymbol{e}_w$, samt visa att de (i denna ordning) bildar ett *ortonormalt högersystem.* (2p)

(b) Beräkna en lösning till Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$, som bara beror på u − det vill säga $\phi = \phi(u)$. (1p)

Lösning: (a)

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,dw = (2u, 2v\cos w, 2v\sin w)\,du \\
&+ (-2v, 2u\cos w, 2u\sin w)\,dv + (0, -2uv\sin w, 2uv\cos w)\,dw \\
&= \sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{(u, v\cos w, v\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}}\,du \\
&+ \sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{(-v, u\cos w, u\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}}\,dv \\
&+ uv\cdot(0, -\sin w, \cos w)\,dw \\
&= h_u\,\boldsymbol{e}_u\,du + h_v\,\boldsymbol{e}_v\,dv + h_w\,\boldsymbol{e}_w\,dw,
\end{aligned}
$$

där $h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_w = uv$ och

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{e}_u = \dfrac{(u, v\cos w, v\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \\
\boldsymbol{e}_v = \dfrac{(-v, u\cos w, u\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \\
\boldsymbol{e}_w = (0, -\sin w, \cos w).
\end{cases}
$$

Man ser omedelbart att dessa är inbördes ortogonala. Och

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u \times \boldsymbol{e}_v &= \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u & v\cos w & v\sin w \\ -v & u\cos w & u\sin w \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\,(0, -(v^2+u^2)\sin w, (u^2+v^2)\cos w) \\
&= (0, -\sin w, \cos w) = +\,\boldsymbol{e}_w \Longrightarrow \text{högersystem.}
\end{aligned}
$$

(b) BETA $\Longrightarrow$

$$
\Delta\phi(u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\,\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = \frac{1}{(u^2+v^2)uv}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\,\frac{\partial \phi}{\partial u}\right).
$$

Så

$$\begin{aligned}
&\Delta\phi = 0 \iff \frac{d}{du}\left(u\,\frac{d\phi}{du}\right) = 0 \iff \\
&u\,\frac{d\phi}{du} = A \iff \frac{d\phi}{du} = \frac{A}{u} \iff \\
&\phi = A\ln u + B,
\end{aligned}$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

6. Vektorfätet $\boldsymbol{F}$ ges i sfäriska koordinater av

$$\boldsymbol{F} = (2r\cos 2\theta - \cos\theta)\,\boldsymbol{e}_r - (2r\sin 2\theta - \sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

Visa att linjeintegralen

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot} d\boldsymbol{r}$$

är oberoende av vägen, samt beräkna $\mathcal{I}$ då $\mathcal{C}$ går från $\mathcal{O}$ = origo till den punkt $\mathcal{P}$ vars Cartesiska koordinater är $(2, 0, 0)$. (3p)

Lösning: Vi söker en potentialfunktion U, som alltså uppfyller

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial \phi}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$

Detta ger

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial r} = 2r\cos 2\theta - \cos\theta, \\
\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -2r^2\sin 2\theta + r\sin\theta, \\
\dfrac{\partial U}{\partial \phi} = 0.
\end{cases}$$

Sista ekvationen visar att $U = U(r, \theta)$, varpå den första ger att

$$U(r, \theta) = r^2\cos 2\theta - r\cos\theta + g(\theta);$$

detta insatt i den andra $\Longrightarrow$

$$-2r^2\sin 2\theta + r\sin\theta + g'(\theta) = -2r^2\sin 2\theta + r\sin\theta \Longrightarrow g = C \Longrightarrow$$

kan ta $U = r^2 \cos 2\theta - r\cos\theta$. Så

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot} d\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} dU = U(\mathcal{P}) - U(\mathcal{O}).$$

I $\mathcal{P}$ är $r = 2$, $\theta = \pi/2$ och $\phi = 0$, varför

$$\mathcal{I} = 4\cos\pi - 2\cos\frac{\pi}{2} - 0 = -4.$$

7. Bestäm en konform avbildning $w = f(z)$ av $D_z = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 2$ och $0 < \arg z < \pi/2\}$ på enhetsskivan $D_w = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| < 1\}$ så att punkten $P_z = 1 + i$ avbildas på punkten $P_w = 0$. (4p)

Lösning: Man *måste* naturligtvis rita figurer. Här är en hjälp till ritandet.

(1) $w_1 = z/2 \Longrightarrow$ området $D_1 = \{|w_1| < 1,\ 0 < \arg w_1 < \pi/2$ och punkten $P_1 = (1+i)/2$.

(2) Kvadrera: $w_2 = w_1^2 = (z/2)^2$ för att få $\{|w_2| < 1,\ 0 < \arg w_2 < \pi\}$ − det vill säga en cirkeltvåhörning − och $P_2 = i/2$.

(3) Skicka tvåhörningens hörn till ∞ respektive 0 med en Möbius:

$$w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} = \frac{(z/2)^2 - 1}{(z/2)^2 + 1}.$$

$w_2 = 0 \Longrightarrow w_3 = -1$ och $w_2 = i \Longrightarrow w_3 = i$ visar att bilden blir 2:a kvadranten: $D_3 = \{\pi/2 < \arg w_3 < \pi\}$ och

$$P_3 = \frac{i/2 - 1}{i/2 + 1} = \cdots = \frac{-3 + 4i}{5}.$$

(4) Vrid sedan med $-\pi/2$ för att få 1:a kvadranten:

$$w_4 = e^{-i\pi/2} w_3 = -i w_3 = -i\,\frac{z^2 - 4}{z^2 + 4}.$$

Då blir

$$D_4 = \{0 < \arg w_4 < \pi/2\} \text{ och } P_4 = \frac{4 + 3i}{5}.$$

(5) Kvadrera för att få övre halvplanet:

$$w_5 = w_4^2 = -\left(\frac{z^2 - 4}{z^2 + 4}\right)^2 \Longrightarrow$$

$D_5 =$ övre halvplanet och $P_5 = (7 + 24i)/25$.

(6) Standardavbildningen på enhetsskivan består i att man skickar P_5 till $w = 0$ och spegelpunkten $\bar{P}_5$ till $w = \infty$ med

$$w = \frac{w_5 - \frac{7+24i}{25}}{w_5 - \frac{7-24i}{25}} = \frac{-\left(\frac{z^2-4}{z^2+4}\right)^2 - \frac{7+24i}{25}}{-\left(\frac{z^2-4}{z^2+4}\right)^2 - \frac{7-24i}{25}}$$
$$= \frac{25\,(z^2-4)^2 + (7+24i)\,(z^2+4)^2}{25\,(z^2-4)^2 + (7-24i)\,(z^2+4)^2}.$$

8. Bestäm en reell funktion $\phi(x, y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y+1)^2 < 2 \text{ och } x^2 + (y-1)^2 < 2\}$$

och som antar följande värden på D:s rand:

$$\begin{cases} \phi = 5 \text{ då } x^2 + (y+1)^2 = 2 \text{ och } y > 0, \\ \phi = 2 \text{ då } x^2 + (y-1)^2 = 2 \text{ och } y < 0. \end{cases} \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: D är en cirkeltvåhörning, och därför skickar vi hörnpunkten $z = -1$ till ∞ och $z = 1$ till 0 med en Möbius:

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1},$$

så att cirkelbågarna avbildas på räta linjer utgående från $w_1 = 0$.

Enkel geometri visar att vinklarna mellan cirkelbågarna och reella axeln vid hörnen är $\pi/4$, varpå vinkelbevarandet medför att bildområdet blir $\{w_1 \in \mathbb{C} \colon 3\pi/4 < \arg w_1 < 5\pi/4\}$.

Alternativt kan man sätta in cirkelbågarnas mittpunkter i uttrycket för w_1:

$$z = \pm i(\sqrt{2} - 1) \Longrightarrow w_1 = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}},$$

vilket bekräftar resultatet ovan.

Eftersom det är trevligare att befinna sig i högra halvplanet vrider vi med vinkeln π:

$$w = e^{i\pi} w_1 = -w_1 = \frac{1-z}{1+z},$$

och får då området $\{w \in \mathbb{C}\colon -\pi/4 < \arg w < \pi/4\}$.

Möbius är konform, och bevarar därför Laplaces ekvation. Med $w = u + iv$ får vi följande problem i uv-planet:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ då } -u < v < u \text{ och } u > 0, \\ \phi = 2 \text{ då } v = u, \\ \phi = 5 \text{ då } v = -u. \end{cases}$$

Ansatsen $\phi = A \arg w + B$ uppfyller Laplaces ekvation, och på ränderna fås

$$\begin{cases} 2 = A \cdot \dfrac{\pi}{4} + B, \\ 5 = A \cdot \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + B, \end{cases}$$

varur det följer att $A = -6/\pi$ och $B = 7/2$. Alltså blir

$$\phi = -\frac{6}{\pi} \arctan \frac{v}{u} + \frac{7}{2},$$

där

$$\begin{aligned} u + iv = w = \frac{1-z}{1+z} &= \frac{(1-x) - iy}{(1+x) + iy} = \dots \\ &= \frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{-2y}{(x+1)^2 + y^2} \\ \Longrightarrow \frac{v}{u} &= -\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

så att svaret blir

$$\phi(x, y) = \frac{6}{\pi} \arctan \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} + \frac{7}{2}.$$

Kontroll av randvärdena:

(1) $\quad x^2 + (y+1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 = 1 - 2y \iff \dfrac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \dfrac{2y}{2y}$

$$= 1 \Longrightarrow \arctan \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \phi = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{7}{2} = 5;$$

(2) $x^2+(y-1)^2=2 \iff x^2+y^2=1+2y \iff \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}=\dfrac{2y}{-2y}$

$= -1 \Longrightarrow \arctan\dfrac{2y}{1-x^2-y^2} = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$\phi = -\dfrac{6}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7}{2} = 2.$