KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE och CMIEL 2011–08–23, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Härled formeln

$$\boldsymbol{F} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{G}$$

   med hjälp av indexräkning.
   LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. (3p)

2. Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ y^2 + z^2 \le 1\}$, och låt $\boldsymbol{F} = (2x^2, y, z + x)$. Beräkna flödesintegralen

$$\mathcal{I} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

   (där $\hat{\boldsymbol{n}}$ pekar ut ur Ω) på två sätt:

   (a) med divergenssatsen, (1p)

   (b) direkt. (2p)

3. Beräkna *alla* värden som $|(1 + i)^{2+i}|$ antar. (3p)

4. Låt $\boldsymbol{F} = (-x, 0, 2x + z)$.

   (a) Visa att $\boldsymbol{F}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ (det vill säga $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$), som kan beräknas genom ansatsen $\boldsymbol{A} = (0, A_y, 0)$. (1p)

(b) Låt $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 + (x^2 + y^2 - 1)^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS,$$

där enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv z-komponent. (2p)

5. Man inför kroklinjiga koordinater $\{u, v, w\}$ (där $u > 0$, $v > 0$ och $0 \leq w < 2\pi$) genom

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv \cos w, 2uv \sin w).$$

(a) Bestäm motsvarande basvektorer $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ och $\boldsymbol{e}_w$, samt visa att de (i denna ordning) bildar ett *ortonormalt högersystem.* (2p)

(b) Beräkna en lösning till Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$, som bara beror på u – det vill säga $\phi = \phi(u)$. (1p)

6. Vektorfätet $\boldsymbol{F}$ ges i sfäriska koordinater av

$$\boldsymbol{F} = (2r \cos 2\theta - \cos\theta)\, \boldsymbol{e}_r - (2r \sin 2\theta - \sin\theta)\, \boldsymbol{e}_\theta.$$

Visa att linjeintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\mathcal{C} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

är oberoende av vägen, samt beräkna $\mathcal{I}$ då $\mathcal{C}$ går från $\mathcal{O}$ = origo till den punkt $\mathcal{P}$ vars Cartesiska koordinater är $(2, 0, 0)$. (3p)

7. Bestäm en konform avbildning $w = f(z)$ av $D_z = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 2$ och $0 < \arg z < \pi/2\}$ på enhetsskivan $D_w = \{w \in \mathbb{C} \colon |w| < 1\}$ så att punkten $P_z = 1 + i$ avbildas på punkten $P_w = 0$. (4p)

8. Bestäm en reell funktion $\phi(x, y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y + 1)^2 < 2 \text{ och } x^2 + (y - 1)^2 < 2\}$$

och som antar följande värden på D:s rand:

$$\begin{cases} \phi = 5 \text{ då } x^2 + (y + 1)^2 = 2 \text{ och } y > 0, \\ \phi = 2 \text{ då } x^2 + (y - 1)^2 = 2 \text{ och } y < 0. \end{cases} \qquad (4p)$$