Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner
Tentamen, måndagen den 19 december 2011. Lösningsförslag

1. Räkna ut flödesintegral

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

där $\mathbf{F} = (x - e^y,\ y - \sin z,\ z)$ och ytan Y ges av ekvation $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$. Normalen till Y väljs så att den har positivt z-komponent.

Lösning. Ekvationen $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$ ger oss en del av koniska ytan kring z-axeln som är inte en sluten yta. Vi tillsätter till ytan Y det "övre locket" Y_1 d v s cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$ i planet $z = 1$ och betecknar den erhålna slutna ytan med S. Vi observerar att valet av normalen med positiv z-komponent på ytan Y innebär att normalen på den slutna ytan S pekar inåt och normalen till "locket" Y_1 skall vara $(0, 0, -1)$. Enligt divergenssats, har vi

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz,$$

där K är den koniska kroppen som begränsas av den slutna ytan S.

Vi har $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 3$ och högerledet av sista formeln blir

$$-3\mathrm{Vol}(K) = -3\cdot\frac{1}{3}\pi 1^2 = -\pi.$$

Ytintegralen över "locket" är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} -z\,dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2\le 1} 1\,dx\,dy = -\mathrm{Area}(Y_1) = -\pi.$$

Detta ger oss

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \pi = -\pi$$

och vi får

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0.$$

2. Härled formeln m h av indexräkning

$$\mathrm{curl}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = -2\mathbf{F} + \mathbf{r}\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F}.$$

Här $\mathbf{F}$ är något vektorfält och $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ är ortvektorn.

Ledning: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Lösning. Vi har

$$[\mathrm{curl}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{F})]_i = [\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{F})]_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\epsilon_{klm}x_l F_m) =$$

$$= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_l F_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}(x_l F_m) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i F_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j F_i).$$

Nu uttnytjar vi sambandet $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ i första termen och sambandet $\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 3$ i andra termen (trean uppstår eftersom derivatan 1 upprepas tre gånger vid summering). Vi får då

$$\delta_{ij} F_j + x_i \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - 3F_i - x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = [-2\mathbf{F} + \mathbf{r}\,\mathrm{div}(\mathbf{F}) - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F}]_i.$$

Beviset är klart!

3. (a) För vilket värde på parametern a är funktionen $u(x, y) = x^2 + xy + ay^2$ reel del av en funktion $f(z)$, $z = x + iy$ som är komplex deriverbar?

(b) Bestäm funktionen $f(z)$ (uttryckt i z) för sådant a.

Lösning.

(a) $u(x, y)$ är reel del av en funktion $f(z)$, $z = x + iy$ som är komplex deriverbar om u uppfyller Laplaces ekvation $\Delta u = 0$. Vi har

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + xy + ay^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + xy + ay^2) = 2 + 2a.$$

Detta blir 0 om $a = -1$.

(b) Vi söker funktionen f i form $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funktionen v skall uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y.$$

Integrering av dn första ekvation ger

$$v(x, y) = -x^2/2 + 2xy + C(y),$$

där $C(y)$ är någon funktion beroende endast på y. Insättning av detta till den andra ekvationen ger oss

$$2x + C'(y) = 2x + y$$

varav $C(y) = y^2/2 + D$, där D är någon reel konstant. Vi har $v(x, y) = -x^2/2 + 2xy + y^2/2 + D$ och

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 + xy - y^2 + i(-x^2/2 + 2xy + y^2/2) + iD = \\ &= [x^2 - y^2 + 2ixy] - i/2 \cdot [x^2 - y^2 + 2ixy] + iD = (1 - i/2)z^2 + iD. \end{aligned}$$

(1p) **4.** (a) För vilket värde på parametern b är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (y^2 + 4xz, 2xy - z^3, -3yz^2 + bx^2)$$

konservativt?

(2p) (b) För sådant värde b bestäm linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är någon linje från punkten $(1,0,1)$ till punkten $(0,-1,1)$.

Lösning.

(a) Vi söker potentialen till vektorfältet d v s en funktion $g(x,y,z)$ sådan att

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = y^2 + 4xz; \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy - z^3; \\ \frac{\partial g}{\partial z} = -3yz^2 + bx^2. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger oss

$$g(x,y,z) = xy^2 + 2x^2z + C(y,z),$$

där $C(y,z)$ är någon funktion som beror endast på y och z. Insättningen till den andra ekvationen ger oss

$$2xy + \frac{\partial C}{\partial y} = 2xy - z^3,$$

varav $C(y,z) = -yz^3 + D(z)$ och $g(x,y,z) = xy^2 + 2x^2z - yz^3 + D(z)$. Till slut, insättningen till den tredje ekvationen ger oss

$$2x^2 - 3yz^2 + D'(z) = -3yz^2 + bx^2,$$

eller $(2-b)x^2 = -D'(z)$. Den ekvation kan uppfyllas endast om $b = 2$ och $D'(z) = 0$ d v s $D(z) = D = \text{Const}$.

(b) Linjeintegralen är $g(0,-1,1) - g(1,0,1)$, där $g(x,y) = xy^2 + 2x^2z - yz^3 + D$ är potentialen till vektorfltet upphittad i (a). Svaret blir $1 - 2 = -1$.

(3p) **5.** Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av formeln $\mathbf{F} = R^3\mathbf{e}_R + R^2\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$ i cylindriska koordinater R, ϕ, z. Räkna ut flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur enhetssfären

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Lösning. Vi använder oss av Gauss sats och räknar utflödet som integralen av $\operatorname{div}\mathbf{F}$ över enhetsklotet. Divergens i cylinderkoordinater är

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\cdot F_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}F_\phi + \frac{\partial}{\partial z}F_z.$$

Vi har $F_R = R^3$, $F_\phi = R^2\cos\phi$, $F_z = 0$ vilket ger $\operatorname{div}\mathbf{F} = 4R^2 - R\sin\phi$.

Enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ i cylinderkoordinater R, ϕ, z ges av olikheter $R^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och Jakobian är R. Detta ger oss trippelintegralen

$$\int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dR \int_0^{2\pi} d\phi \cdot R(4R^2 - R\sin\phi) = 2\pi \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 4R^3\,dR =$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-z^2)^2\,dz = \frac{32\pi}{15}.$$

(3p) **6.** Man inför kroklinjiga koordinater ρ, θ, ϕ lokalt nära punkten $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ genom sambanden

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos\theta)\cos\phi; \\ y = (R + \rho\cos\theta)\sin\phi; \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Bestäm skalfaktorerna h_ρ, h_ϕ, h_θ samt härled formeln för Laplaceoperatorn $\nabla^2 g$ för funktionen $g = g(\rho)$ som beror endast på variabeln ρ.

Lösning. Ortsvektorn $\mathbf{r}$ i nya koordinater är

$$\mathbf{r}(\rho, \theta, \phi) = (\,(R + \rho\cos\theta)\cos\phi, (R + \rho\cos\theta)\sin\phi, \rho\sin\theta\,).$$

Vi har

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\,\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta\,);$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\,-\rho\sin\theta\cos\phi, -\rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta\,)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (\,-(R + \rho\cos\theta)\sin\phi, (R + \rho\cos\theta)\cos\phi, 0\,).$$

Detta ger oss skalfaktorer:

$$h_\rho = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = 1; \quad h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = \rho; \quad h_\phi = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right| = R + \rho\cos\theta.$$

Om funktionen g beror endast på ρ, då är $\nabla g = g'(\rho)\mathbf{e}_\rho$ och Laplaceoperatorn blir

$$\nabla^2 g = \nabla \cdot \nabla g = \frac{1}{\rho(R + \rho\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho(R + \rho\cos\theta) g'(\rho)\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho} g'(\rho) + \frac{\cos\theta}{R + \rho\cos\theta} g'(\rho) + g''(\rho).$$

(4p) **7.** Bestäm en konform avbildning av området Ω som ges av olikheter $|z - 1| < \sqrt{2}$, $|z + 1| < \sqrt{2}$ på övre halvplanet som ges av villkor $\operatorname{Im} w > 0$.

Lösning. Skärningspunkter av cirklarna är $\pm i$. Därför väljer vi den första avbildningen i form

$$w(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Både cirklarna avbildas med den till räta linjer som går genom origo. Den första linjen innehåller punkten

$$w_1 = w(-1 + \sqrt{2}) = 2\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} \cdot (-1 - i)$$

med $\arg(w_1) = \frac{5\pi}{4}$. Den andra linjen innehåller punkten

$$w_2 = w(1 - \sqrt{2}) = 2\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} \cdot (-1 + i)$$

med $\arg(w_1) = \frac{3\pi}{4}$. Området efter avbildningen $w = w(z)$ blir vinkelområdet som ges av $\frac{3\pi}{4} < \arg(w) < \frac{5\pi}{4}$. Rotation $u = e^{-3\pi i/4}w$ avbildar den på vinkelområdet $0 < \arg(u) < \pi/2$ och till slut kvadrering $v = u^2$ ger oss den övre halvplanet. Eftersom $\left(e^{-3\pi i/4}\right)^2 = e^{-3\pi i/2} = i$, svaret blir

$$v = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2.$$

(4p) **8.** Lös följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \Delta g(x,y) = 0 \text{ om } x^2 - y^2 > 1,\ x > 0,\ y > 0; \\ g(x,y) = -1 \text{ om } x^2 - y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0; \\ g(x,0) = 1 \text{ om } x \geq 1. \end{cases}$$

Ledning: undersök hur transformationen $w = z^2$ avbildar området som ges av olikheter $x^2 - y^2 > 1$, $x > 0$, $y > 0$.

Lösning. Vi undersöker först transformationen $w_1 = z^2$. Om vi skriver $w_1 = u + iv$ och $z = x + iy$, då är $u = x^2 - y^2$ och $v = 2xy$. Området $x^2 - y^2 > 1$; $x, y > 0$ övergår då till vinkelområdet $u > 1$; $v > 0$ och randkurvan $x^2 - y^2 = 1$; $x, y > 0$ övergår till linjen $u = 1$, $v > 0$. Nästa avbildningen $w = (w-1)^2$ som är kombination av förskjutning och kvadrering skickar vinkelområdet $u > 1$; $v > 0$ till det övre halvplanet $\mathrm{Im}(w) > 0$ och linjen $u = 1$, $v > 0$ skickas till den negaiva reella halvaxeln. Randvärdesproblem i w-planet blir då

$$\begin{cases} \Delta f(w) = 0 \text{ om } \mathrm{Im}(w) > 0 \\ f(t) = -1 \text{ om } -\infty < t < 0; \\ f(t) = 1 \text{ om } t \geq 0. \end{cases}$$

Randvillkor ges av funktion $-1 + 2\mathcal{U}(t)$, där $\mathcal{U}$ är standard enhetsstegfunktion (Heavisides funktion). Vi använder oss av standard formel för att lösa randvärdesproblem med enhetsstegfunktion som randfunktion och vi får lösningen

$$f(w) = -1 + \frac{2}{\pi}(\pi - \arg(w)).$$

Svar till ursprungliga problemet är $g(z) = f\left(\,(z^2-1)^2\,\right)$, där

$$f(w) = -1 + \frac{2}{\pi}(\pi - \arg(w)).$$