Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner
Tentamen, måndagen den 19 december 2011 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen BETA samt TETs inplastade formelblad.

För godkänd (betyg E) krävs minst 12 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 15p för D, 18p för C, 21p för B samt 24p för A. Den som får 11p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Den som klarar kontrollskrivning 1, 2 eller 3 får full poäng på motsvarande uppgift.

L Y C K A   T I L L !

(3p) **1.** Räkna ut flödesintegral

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

där $\mathbf{F} = (x - e^y,\ y - \sin z,\ z)$ och ytan Y ges av ekvation $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$. Normalen till Y väljs så att den har positivt z-komponent.

(3p) **2.** Härled formeln m h av indexräkning

$$\operatorname{curl}(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = -2\mathbf{F} + \mathbf{r}\operatorname{div}(\mathbf{F}) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{F}.$$

Här $\mathbf{F}$ är något vektorfält och $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ är ortvektorn.

Ledning: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

(1p) **3.** (a) För vilket värde på parametern a är funktionen $u(x,y) = x^2 + xy + ay^2$ reel del av en funktion $f(z)$, $z = x + iy$ som är komplex deriverbar?

(2p) (b) Bestäm funktionen $f(z)$ (uttryckt i z) för sådant a.

(1p) **4.** (a) För vilket vrde på parametern b är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (y^2 + 4xz, 2xy - z^3, -3yz^2 + bx^2)$$

konservativt?

(2p) (b) För sådant värde b bestäm linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där C är någon linje från punkten $(1, 0, 1)$ till punkten $(0, -1, 1)$.

VÄND!

(3p) **5.** Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av formeln $\mathbf{F} = R^3\mathbf{e}_R + R^2\cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$ i cylindriska koordinater R, ϕ, z. Räkna ut flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur enhetssfären

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

(3p) **6.** Man inför kroklinjiga koordinater ρ, θ, ϕ lokalt nära punkten $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ genom sambanden

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos\theta)\cos\phi; \\ y = (R + \rho\cos\theta)\sin\phi; \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Bestäm skalfaktorerna h_ρ, h_ϕ, h_θ samt härled formeln för Laplaceoperatorn $\nabla^2 g$ för funktionen $g = g(\rho)$ som beror endast på variabeln ρ.

(4p) **7.** Bestäm en konform avbildning av området Ω som ges av olikheter $|z - 1| < \sqrt{2}$, $|z + 1| < \sqrt{2}$ på övre halvplanet som ges av villkor $\operatorname{Im} w > 0$.

(4p) **8.** Lös följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \Delta g(x, y) = 0 \text{ om } x^2 - y^2 > 1,\ x > 0,\ y > 0; \\ g(x, y) = -1 \text{ om } x^2 - y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0; \\ g(x, 0) = 1 \text{ om } x \geq 1. \end{cases}$$

Ledning: undersök hur transformationen $w = z^2$ avbildar området som ges av olikheter $x^2 - y^2 > 1$, $x > 0$, $y > 0$.